

## MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

1. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula  $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$  (1,5 pt.)

b) Despeja  $X$  en la ecuación matricial  $X \cdot A = A + I$  (0,5 pt.)

c) Calcula  $X$  para que verifique la ecuación matricial. (1 pt.)

2. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$

Calcula todos los valores de  $x$  e  $y$  para los que se verifica:  $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  (2 pt.)

3. Calcula las matrices  $A$  y  $B$  en el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad y \quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ pt.})$$

4. Dada la siguiente ecuación matricial:  $A \cdot X + X = B$

a) Despeja  $X$  y determina su orden. (1 pt.)

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcula  $(A + I)^{-1}$  (1,5 pt.)

c) Calcula  $X$  para que verifique la ecuación matricial. (0,5 pt.)

1. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula  $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$  (1,5 pt.)

b) Despeja  $X$  en la ecuación matricial  $X \cdot A = A + I$  (0,5 pt.)

c) Calcula  $X$  para que verifique la ecuación matricial. (1 pt.)

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  Calculamos la inversa  $A^{-1}$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ F_2 \rightarrow 2 \cdot F_2 + F_1}} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ F_1 \rightarrow F_1 - F_2}} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ F_1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot F_1 \\ F_2 \rightarrow F_2 \cdot (-1)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ , Comprobación

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Q.E.D.}$$

$$2 \cdot B + 3 \cdot I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$$

b)  $X \cdot A = A + I$

$$\underbrace{X \cdot A \cdot A^{-1}}_I = (A + I) \cdot A^{-1} \quad X = (A + I) \cdot A^{-1}$$

c)  $X = (A + I) \cdot A^{-1}$

$$X = \left[ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobación

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Q.E.D. } X \cdot A = A + I$$

2. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$

Calcula todos los valores de  $x$  e  $y$  para los que se verifica:  $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  (2 pt.)

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & -1+y^2 \end{pmatrix}$$

Debe cumplirse que  $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & -1+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  Igualamos los elementos de ambas matrices

$$\left. \begin{array}{l} x^2-1 = x+1 \\ x+y = 2 \\ -x-y = -2 \\ -1+y^2 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2-y = 2 \\ \Rightarrow y = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x^2-1 = x+1 \checkmark \\ 2+0 = 2 \checkmark \end{array} \right\} \text{ Luego } x=2, y=0$$

↗ comprobamos

3. Calcula las matrices  $A$  y  $B$  en el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A - B = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}}_C \quad \text{y} \quad 3A + 2B = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}}_D \quad (2 \text{ pt.})$$

Resolvemos por reducción:

$$\left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ 3A + 2B = D \end{array} \right\} \cdot 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 4A - 2B = 2C \\ 3A + 2B = D \end{array} \right\} +$$

$$7A = 2C + D$$

$$A = \frac{1}{7} (2C + D)$$

$$A = \frac{1}{7} \cdot \left[ 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \right]$$

$$A = \frac{1}{7} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \right]$$

$$A = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 49 & 14 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora despejo  $B$  de cualquiera de las 2 ecuaciones:  $2A - B = C$   
 $B = 2A - C$

$$B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 4 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

4. Dada la siguiente ecuación matricial:  $A \cdot X + X = B$

a) Despeja  $X$  y determina su orden.

(1 pt.)

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcula  $(A + I)^{-1}$

(1,5 pt.)

c) Calcula  $X$  para que verifique la ecuación matricial.

(0,5 pt.)

a)  $AX + X = B$

$AX + I \cdot X = B$

$(A + I) \cdot X = B$

$\underbrace{(A + I)^{-1}(A + I)}_I \cdot X = (A + I)^{-1}B \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B$

b)  $A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  , Calculamos la inversa:

$(A + I)^{-1} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_3}$

$= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

c)  $X = (A + I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Se cumple que  $AX + X = B$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Q.E.D.