

MATRICES

1. Sean las **matrices**:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) **Calcula** el valor de x para que se verifique $B^2 = A$. $x = 1$ (1 pt.)

b) **Calcula** el valor de x para que $B + C = A^{-1}$. $x = -2$ (1 pt.)

c) **Calcula** el valor de x para que se verifique:

$$A - B + \frac{1}{2} \cdot C = 3 \cdot I_2, \text{ donde } I_2 \text{ es la matriz identidad de orden 2} \quad x = \frac{5}{2} \quad (1 \text{ pt.})$$

2. Considera la matriz $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$.

Calcula los valores de a para que $A^{-1} = A^t$ $a = \pm 3$ (1 pt.)

3. Dada la siguiente **ecuación matricial**: $A^2 X - B = AX$.

a) **Despeja** X y determina el **orden**. $X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$ (1 pt.)

b) **Calcula** X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (2 pt.)

4. En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis, P_1 , P_2 y P_3 , en dos modelos diferentes M_1 y M_2 .

El **número** de **prótesis** que tienen ya construidas viene dado por la tabla **A**. El **precio**, en euros, de cada prótesis viene dado por la tabla **B**:

A	M_1	M_2
P_1	11	21
P_2	16	12
P_3	9	14

B	P_1	P_2	P_3
M_1	150	160	240
M_2	210	190	220

a) Escribe las **matrices** A y B y obtén, si es posible, las **matrices** $C = AB$ y $D = BA$.

b) ¿Qué **información** proporciona el elemento c_{12} de la matriz C y el elemento d_{22} de D ?

c) ¿Qué **elemento** de C o de D proporciona el **valor total de todas las prótesis** del tipo P_2 ?

$$C = \begin{pmatrix} 6060 & 5750 & 7260 \\ 4920 & 4840 & 6480 \\ 4290 & 4100 & 5240 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6370 & 8430 \\ 7330 & 9770 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ pt.})$$

c_{12} : Valor de las prótesis tipo P_1 (en ambos modelos) al precio de la prótesis tipo P_2 .

d_{22} : Valor del modelo M_2 (para todos los tipos de prótesis).

El coeficiente $c_{22} = 16 \cdot 160 + 12 \cdot 190 = 4840 \text{ €}$

1. Sean las **matrices**:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) **Calcula** el valor de x para que se verifique $B^2 = A$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+x^2 & 3x \\ 3x & x^2+1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+x^2 & 3x \\ 3x & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4+x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \quad (x = -1 \text{ no cumple}) \\ x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right\} \text{ Solución: } x = 1$$

b) **Calcula** el valor de x para que $B + C = A^{-1}$.

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 5F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 \cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

$$B + C = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x-1 = -3 \Rightarrow x = -2$$

c) **Calcula** el valor de x para que se verifique:

$$A - B + \frac{1}{2} \cdot C = 3 \cdot I_2, \text{ donde } I_2 \text{ es la matriz identidad de orden 2}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3-x \\ 3-x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 - x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad x = \frac{5}{2}$$

2. Considera la matriz $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$.

Calcula los valores de a para que $A^{-1} = A^t$

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \underbrace{AA^{-1}}_I = AA^t \Rightarrow AA^t = I$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} a^2+16 & 0 \\ 0 & a^2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2+16 = 25 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

3. Dada la siguiente **ecuación matricial** : $A^2X - B = AX$.

a) **Despeja X** y determina el **orden**.

b) **Calcula X** siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) $A^2X - B = AX$

$$A^2X - AX = B$$

$$(A^2 - A) \cdot X = B$$

$$\underbrace{(A^2 - A)^{-1} (A^2 - A)}_I \cdot X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

Matriz cuadrada del mismo orden que A y B .

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - A)^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow 2F_1 + F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_2}} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + F_3 \\ F_1 \rightarrow 2F_1 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow F_1 \cdot \frac{1}{4} \\ F_2 \rightarrow F_2 \cdot \frac{1}{2} \\ F_3 \rightarrow F_3 \cdot \frac{1}{4}}} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array} \right) = (A^2 - A)^{-1}$$

$$X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ -3 & \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{4} - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/4 & -1/2 \\ -3 & 2 & -1/2 \\ -3/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis, P_1 , P_2 y P_3 , en dos modelos diferentes M_1 y M_2 .

El **número de prótesis** que tienen ya construidas viene dado por la tabla **A**. El **precio**, en euros, de cada prótesis viene dado por la tabla **B**:

A	M_1	M_2
P_1	11	21
P_2	16	12
P_3	9	14

B	P_1	P_2	P_3
M_1	150	160	240
M_2	210	190	220

- a) Escribe las **matrices** A y B y obtén, si es posible, las **matrices** $C = AB$ y $D = BA$.
b) ¿Qué **información** proporciona el elemento c_{12} de la matriz C y el elemento d_{22} de D?
c) ¿Qué **elemento** de C o de D proporciona el **valor total de todas las prótesis** del tipo P_2 ?

a)

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6060 & 5750 & 7260 \\ 4920 & 4840 & 6480 \\ 4290 & 4100 & 5240 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 3$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6370 & 8430 \\ 7330 & 9770 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 2 \qquad \qquad \qquad 2 \times 2$

b) $c_{12} = 11 \cdot 160 + 21 \cdot 190 = 5750 \text{ €}$

c_{12} : Valor de las prótesis tipo P_1 (en ambos modelos) al precio de la prótesis tipo P_2 .

$d_{22} = 210 \cdot 21 + 190 \cdot 12 + 220 \cdot 14 = 9770 \text{ €}$

d_{22} : Valor del modelo M_2 (para todos los tipos de prótesis).

- c) Valor total de todas las prótesis de tipo P_2 .

El coeficiente $c_{22} = 16 \cdot 160 + 12 \cdot 190 = 4840 \text{ €}$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $P_2 M_1 \text{ Uds.} \quad P_2 M_1 \text{ precio} \quad P_2 M_2 \text{ Uds.} \quad P_2 M_2 \text{ precio}$