

MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
 - a) Calcula las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ (1 pt.)
 - b) Calcula los valores de x e y para que las matrices sean conmutables, es decir, para los que se verifica: $A \cdot B = B \cdot A$ (1,5 pt.)
2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el término general de la potencia n -ésima A^n y después calcula también la potencia A^{10} (1,5 pt.)
3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:
$$\begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2,5 \text{ pt.})$$
4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - a) Calcula la matriz inversa de A por el método de *Gauss-Jordan*. (2 pt.)
 - b) Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial $B^t - A \cdot X = B$ (1 pt.)
 - c) Calcula X numéricamente para que verifique la ecuación matricial anterior. (0,5 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$

(1 pt.)

b) Calcula los valores de x e y para que las matrices sean conmutables, es decir, para los que se verifica: $A \cdot B = B \cdot A$

(1,5 pt.)

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & y+3 \\ 3x+4 & 3y+12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & x+4y \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$b) A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} x+1 & y+3 \\ 3x+4 & 3y+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & x+4y \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$x+1 = x+3y$$

$$y+3 = x+4y$$

$$3x+4 = 10 \Rightarrow x = 2$$

$$3y+12 = 13 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Verificamos las otras dos ecuaciones.

$$x+1 = x+3y \Rightarrow y = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$y+3 = x+4y \Rightarrow x+3y = 3 \Rightarrow 2+3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \checkmark$$

Solución: $x = 2, y = \frac{1}{3}$

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el término general de la potencia n -ésima A^n y después calcula también la potencia A^{10}

(1,5 pt.)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Se busca la relación:

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 2^0$$

$$2 \rightarrow 2 \rightarrow 2^1$$

$$3 \rightarrow 4 \rightarrow 2^2$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 \\ 2^9 & 2^9 \end{pmatrix}$$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

llamamos $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Planteamos el sistema y lo resolvemos por reducción.

$$\left. \begin{array}{l} X + 3Y = A \\ 2X - Y = B \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2X + 6Y = 2A \\ 2X - Y = B \end{array} \right\} - \Rightarrow 7Y = 2A - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{7} \cdot (2A - B) = \frac{1}{7} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de una de las dos ecuaciones: $X + 3Y = A \Rightarrow X = A - 3Y \Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Calcula la matriz inversa de A por el método de Gauss-Jordan. (2 pt.)
- Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial $B^t - A \cdot X = B$ (1 pt.)
- Calcula X numéricamente para que verifique la ecuación matricial anterior. (0,5 pt.)

$$a) (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow -F_2} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X en $B^t - A \cdot X = B \Rightarrow$

$$A \cdot X = B^t - B \Rightarrow$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (B^t - B) \Rightarrow$$

$$X = A^{-1} \cdot (B^t - B)$$

c) Calculamos X:

$$(B^t - B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (B^t - B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$