

MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Define “matriz antisimétrica”. Escribe un ejemplo de orden 4 . (1 pt.)

b) Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial: $-X = B^t - A^2 \cdot X$ (1 pt.)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Calcula el valor de x para que $B + C = A^{-1}$

(Calcula la matriz inversa de A por el método de *Gauss-Jordan*) (2 pt.)

3. Sea A una matriz de dimensión $m \times n$

a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila?

Si existe, ¿qué dimensión tiene? (0,5 pt.)

b) Busca una matriz B , tal que $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1,5 pt.)

4. Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales:
$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$
 (2 pt.)

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el término general de la potencia n -ésima A^n y después calcula también la potencia A^{2001} (2 pt.)

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Define "matriz antisimétrica". Escribe un ejemplo de orden 4.

b) Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial: $-X = B^t - A^2 \cdot X$

a) **Matriz antisimétrica**: Es una matriz cuadrada tal que los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal, son opuestos:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$$

La diagonal es el eje de **antisimetría**.

El eje está compuesto por ceros porque

el cero es el único número igual a su opuesto

$$\text{Si } i=j, a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & -4 & 6 \\ -1 & 4 & 0 & -7 \\ 5 & -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) -X = B^t - A^2 \cdot X \Rightarrow A^2 \cdot X - X = B^t$$

$$\Rightarrow (A^2 - I) \cdot X = B^t$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^2 - I)^{-1} \cdot (A^2 - I)}_I \cdot X = (A^2 - I)^{-1} \cdot B^t$$

$$\Rightarrow X = (A^2 - I)^{-1} \cdot B^t$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Calcula el valor de x para que $B + C = A^{-1}$

(Calcula la matriz inversa de A por el método de Gauss-Jordan)

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ resolvamos la inversa por Gauss-Jordan}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 5F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{5}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D.

Calculamos x para que se verifique la igualdad: $B + C = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x-1 = -3 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$
 Se verifica para todas las ecuaciones.
El resto de ecuaciones son identidades $2 = 2$, $5 = 5$

3. Sea A una matriz de dimensión $m \times n$

a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila?

Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) Busca una matriz B , tal que $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $B_{1 \times m} \cdot A_{m \times n} = C_{1 \times n} \Rightarrow C$ tiene que tener n columnas



B tiene que tener 1 fila como C y m columnas, tantas como filas tiene A para que se pueda multiplicar $\Rightarrow B$ tiene dimensión $1 \times m$, luego $B_{1 \times m} \cdot A_{m \times n} = C_{1 \times n}$

b) $B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; analizando las dimensiones, B tiene un tamaño 1×3

La forma general de $B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}_{1 \times 3}$ siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

B tiene infinitas soluciones: $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \end{pmatrix}}$, $c \in \mathbb{R}$

4. Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales:
$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

llamamos $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Planteamos el sistema y lo resolvemos por reducción.

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = A \\ X - 2Y = B \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = A \\ 2X - 4Y = 2B \end{array} \right\} - \Rightarrow 7Y = A - 2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{7} \cdot (A - 2B) = \frac{1}{7} \cdot \left[\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right] = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Despejamos X de una de las dos ecuaciones: $X - 2Y = B \Rightarrow X = B + 2Y \Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el término general de la potencia n -ésima A^n y después

calcula también la potencia A^{2001}

(2 pt.)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se busca la relación:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 1 \longrightarrow 2^0 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \longrightarrow 2^1 \\ 3 & \longrightarrow & 4 \longrightarrow 2^2 \end{array}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{2001} = \begin{pmatrix} 2^{2000} & 0 & 2^{2000} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{2000} & 0 & 2^{2000} \end{pmatrix}$$