

MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $A - 2 \cdot B$ (1 pt.)

b) Halla el valor de cada incógnita x, y, z para que las matrices sean iguales. (2 pt.)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A por el método de *Gauss-Jordan*. (1,5 pt.)

b) Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial $A \cdot X + B^t = B$ (1 pt.)

c) Calcula X numéricamente con los valores de A y B . (1 pt.)

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Verifica que $(A + B)^t = A^t + B^t$ (1,5 pt.)

b) Verifica que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (2 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $A - 2 \cdot B$

b) Halla el valor de cada incógnita x, y, z para que las matrices sean iguales.

$$\begin{aligned} a) \quad A - 2 \cdot B &= \begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x+1-4 & 3-2y-2 & 0 \\ z+1-2y-4 & x+2-6 & z-1-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 & 1-2y & 0 \\ z-2y-3 & x-4 & z-1-2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad A = B &\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 3 = y+1 \Rightarrow y = 2 \\ z+1 = y+2 \\ z+1 = 4 \Rightarrow z = 3 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x+2 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z-1 = y \Rightarrow z = y+1 = 3 \\ \text{Además se cumple } 0 = 0 \end{array} \right\} \\ &\quad \text{Solución: } x = 1, y = 2, z = 3 \end{aligned}$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, resolvamos la inversa por Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow 3F_2 - 2F_1 \\ F_1 \rightarrow 4F_1 - F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow \frac{1}{12}F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{8}F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$

b) Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial $A \cdot X + B^t = B$

c) Calcula X numéricamente con los valores de A y B .

$$\begin{aligned} \text{b) } A \cdot X + B^t &= B \Rightarrow \\ A \cdot X &= B - B^t \Rightarrow \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \underline{\bar{A}^{-1} \cdot A} \cdot X &= \bar{A}^{-1} \cdot (B - B^t) \Rightarrow X = \bar{A}^{-1} \cdot (B - B^t) \\ I \end{aligned} \right.$$

$$\text{c) } B - B^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \bar{A}^{-1} \cdot (B - B^t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Verifica que $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) Verifica que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$\text{a) } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

$$\text{b) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 1 & 10 & -17 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & 10 & 4 \\ -7 & -17 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & 10 & 4 \\ -7 & -17 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$