

MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
 - a) Calcula los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$
 - b) Haciendo $a = 1$ y $b = 0$ calcula la matriz inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$
 - a) Despeja X de la ecuación matricial: $A \cdot X - X = B^t$
 - b) Calcula la inversa $(A - I)^{-1}$ por el método de Gauss-Jordan.
 - c) Calcula X para que verifique la ecuación matricial del apartado a).

3. Una empresa fabrica juguetes de 3 tipos T_1 , T_2 y T_3 . Los precios de coste de cada juguete, los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido y las unidades vendidas en un año vienen dados por las siguientes tablas:

Tipo de juguete	T_1	T_2	T_3
Precio de coste Ud. €	4	6	9
Ingreso por Ud. €	10	16	24

Tipo de juguete	T_1	T_2	T_3
Unidades vendidas	4500	3500	1500

Sabiendo que la matriz de costes C y la matriz de ingresos I son matrices diagonales (valores en la diagonal y ceros en el resto) y que la matriz de ventas V es una matriz fila:

- a) Escribe las matrices C , I y V .
- b) Obtén, utilizando las matrices anteriores, la matriz de costes anuales y la matriz de ingresos anuales, correspondientes a los tres tipos de juguetes.

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$

b) Haciendo $a = 1$ y $b = 0$ calcula la matriz inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

$$a) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow 12 = 3b \Rightarrow b = 4$$

$$2 = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$3b = 12 \Rightarrow b = 4$$

Solución: $a = 1$
 $b = 4$

b) $a = 1$, $b = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, resolvamos la inversa por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\uparrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 6F_1$$

$$\text{Comprobación: } B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

a) Despeja X de la ecuación matricial: $A \cdot X - X = B^t$

b) Calcula la inversa $(A - I)^{-1}$ por el método de Gauss-Jordan.

c) Calcula X para que verifique la ecuación matricial del apartado a).

a) $A \cdot X - X = B^t \Rightarrow (A - I) \cdot X = B^t$

$$\underbrace{(A - I)^{-1} \cdot (A - I)}_I \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B^t \Rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot B^t$$

b) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$

resolveremos la inversa por Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{En vez de sumar filas,} \\ \text{vamos a reordenarlas} \end{array} \quad \begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{II}^\circ \text{ método} \\ F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 3F_2 - 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \rightarrow \frac{F_1}{-1} \\ F_2 \rightarrow \frac{F_2}{-3} \\ F_3 \rightarrow \frac{F_3}{3} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \Rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

c) $X = (A - I)^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3. Una empresa fabrica juguetes de 3 tipos T_1 , T_2 y T_3 . Los precios de coste de cada juguete, los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido y las unidades vendidas en un año vienen dados por las siguientes tablas:

Tipo de juguete	T_1	T_2	T_3
Precio de coste Ud. €	4	6	9
Ingreso por Ud. €	10	16	24

Tipo de juguete	T_1	T_2	T_3
Unidades vendidas	4500	3500	1500

Sabiendo que la matriz de costes C y la matriz de ingresos I son matrices diagonales (valores en la diagonal y ceros en el resto) y que la matriz de ventas V es una matriz fila:

- a) Escribe las matrices C , I y V .
- b) Obtén, utilizando las matrices anteriores, la matriz de costes anuales y la matriz de ingresos anuales, correspondientes a los tres tipos de juguetes.

$$a) \quad (Costes) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ €} \quad (Ingresos) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \text{ €}$$

$$(Ventas) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 4500 & 3500 & 1500 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \text{Costes anuales (CA)} \quad \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 4500 & 3500 & 1500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 18000 & 21000 & 13500 \end{pmatrix} \text{ €}$$

$1 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 3$

$$\text{Ingresos anuales (IA)} \quad \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 4500 & 3500 & 1500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 45000 & 56000 & 36000 \end{pmatrix} \text{ €}$$

$1 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 3$

Las matrices se podrían multiplicar en orden inverso y el resultado también es válido.