

MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$
- a) Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (0,75 pt.)
- b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X = 2 \cdot B - C$ (0,75 pt.)
- c) Calcula X para que verifique la ecuación matricial anterior. (1,5 pt.)

2. Calcula todos los valores de x e y para los que se verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2,5 \text{ pt.})$$

3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y n un número natural cualquiera.

Calcula la potencia A^n en general y halla la potencia A^{200} . (1,5 pt.)

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Despeja X de la ecuación matricial. $A \cdot X = X + B$ (1 pt.)
- b) Calcula $(A - I)^{-1}$ (1,5 pt.)
- c) Calcula X para que verifique la ecuación matricial del apartado a). (0,5 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (0,75 pt.)

b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X = 2 \cdot B - C$ (0,75 pt.)

c) Calcula X para que verifique la ecuación matricial anterior. (1,5 pt.)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -15 & 20 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -7 & 20 \end{pmatrix} \text{ Q.E.D.}$$

b) $A \cdot X = 2 \cdot B - C$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} (2 \cdot B - C) \Rightarrow X = A^{-1} (2 \cdot B - C)$$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, Calculamos la inversa A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 5 \cdot F_2 + 2 \cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 \rightarrow -\frac{1}{5} \cdot F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot F_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, Comprobación

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Q.E.D.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot B - C = 2 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} (2 \cdot B - C) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Calcula todos los valores de x e y para los que se verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2,5 \text{ pt.})$$

$$2 \times 2 \cdot 2 \times 1 = 2 \times 2 \cdot 2 \times 1 = 2 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-y = 3+2x \\ 3x+2y = 3y-2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -x-y = 3 \\ 3x-y = -2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \\ y = -x-3 = \frac{5}{4}-3 = -\frac{7}{4} \end{array} \right\}$$

3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y n un número natural cualquiera.

Calcula la potencia A^n en general y halla la potencia A^{200} . (1,5 pt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 600 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Despeja X de la ecuación matricial. $A \cdot X = X + B$ (1 pt.)

b) Calcula $(A - I)^{-1}$ (1,5 pt.)

c) Calcula X para que verifique la ecuación matricial del apartado a). (0,5 pt.)

$$\begin{array}{l} a) \quad A \cdot X = X + B \\ \quad A \cdot X - X = B \\ \quad (A - I) \cdot X = B \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (A - I)^{-1} (A - I) \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B \\ \\ X = (A - I)^{-1} \cdot B \end{array} \right.$$

b) $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calculamos la inversa:

$$(A - I)^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_3 \rightarrow F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow 2F_1 + F_3}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow F_1 / (-2) \\ F_2 \rightarrow F_2 / (-1) \\ F_3 \rightarrow F_3 / (-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

c) $X = (A - I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Se cumple que $A \cdot X = X + B$ $A \cdot X - X = B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$