

MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = (1 \ 3)$

a) Calcula B^{-1} , la matriz inversa de B . (0,5 pt.)

b) Despeja y resuelve X en la ecuación matricial $A^{-1} \cdot X \cdot B - 2 \cdot C \cdot D = B^2$. (1,5 pt.)

c) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Calcula el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro λ . (1 pt.)

2. El cajero de un banco solo dispone de billetes de 10, 20 y 50 €. Hemos sacado 290 € del banco y el cajero nos ha entregado exactamente ocho billetes. El número de billetes de 10 € que nos ha dado es el doble del de 20 €.

a) Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema en forma matricial. (1 pt.)

b) Resuelve el sistema anterior (por el método que quieras). ¿Cuántos billetes de cada tipo nos ha entregado el cajero? (1 pt.)

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3y - 2x \leq 10 \\ x + y \leq 10 \\ y \geq x \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. Calcula en qué puntos de esa región alcanza sus valores máximo y mínimo la función $f(x, y) = 2x - 2y + 7$. (2,5 pt.)

4. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de colectores A y B . Su producción semanal debe ser de por lo menos 10 colectores en total. El número de colectores de tipo B no puede superar en más de 10 al número de los de tipo A . Además, cada colector de tipo A tiene unos costes de producción de 150 € y cada colector de tipo B de 100 € y sólo se dispone de un máximo de 6000 € semanales para pagar el coste total de la producción.

a) Formula el sistema de inecuaciones (restricciones). Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,75 pt.)

b) Se sabe que cada colector de tipo A genera unos beneficios de 130 € y el de tipo B de 140 €. Escribe la función objetivo y calcula cuántos colectores de cada tipo tendrá que producir a la semana para que el beneficio total semanal sea máximo. (0,75 pt.)

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = (1 \ 3)$

a) Calcula B^{-1} , la matriz inversa de B .

b) Despeja y resuelve X en la ecuación matricial $A^{-1} \cdot X \cdot B - 2 \cdot C \cdot D = B^2$.

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$, luego tiene inversa. Para calcular la inversa:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot [\text{Adj}(B)]^t, \text{ La matriz adjunta: } \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{Adj}(B)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \text{ Solución}$$

b) Ecuación matricial:

$$A^{-1} \cdot X \cdot B - 2 \cdot C \cdot D = B^2$$

$$A^{-1} \cdot X \cdot B = B^2 + 2 \cdot C \cdot D$$

$$\underbrace{A \cdot A^{-1}}_I \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = A \cdot (B^2 + 2 \cdot C \cdot D) \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{X = A \cdot (B^2 + 2 \cdot C \cdot D) \cdot B^{-1}} \text{ Finalmente:}$$

$$\left. \begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot C \cdot D &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 3) = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} B^2 + 2 \cdot C \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot (B^2 + 2 \cdot C \cdot D) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 6 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}} \text{ Solución}$$

c) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Calcula el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro λ . Veamos cuándo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - (\lambda^2 - \lambda) = 0 \text{ Polinomio característico}$$

$$|M| = 2\lambda - \lambda^2 = \lambda(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \begin{matrix} < 0 \\ > 2 \end{matrix}$$

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$, la matriz M tiene rango 3. $|M| \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } M = 3$

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 2$, la matriz M tiene un rango menor que 3.

$$|M| = 0 \Rightarrow \text{Rg } M < 3$$

Puedo encontrar un menor de orden 2 cuyo determinante es distinto de cero.

$$\text{Si } \lambda = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rg } M = 2}$$

$$\text{Si } \lambda = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rg } M = 2}$$

2. El cajero de un banco solo dispone de billetes de 10, 20 y 50 €. Hemos sacado 290 € del banco y el cajero nos ha entregado exactamente ocho billetes. El número de billetes de 10 € que nos ha dado es el doble del de 20 €.

- a) Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema en forma matricial. (1 pt.)
 b) Resuelve el sistema anterior (por el método que quieras). ¿ Cuántos billetes de cada tipo nos ha entregado el cajero? (1 pt.)

Condiciones

$$\left. \begin{array}{l} \text{Billetes de 10 €} - x \\ \text{Billetes de 20 €} - y \\ \text{Billetes de 50 €} - z \end{array} \right\} \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 10x + 20y + 50z = 290 \div 10 \Rightarrow \\ x = 2y \Rightarrow x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forma matricial

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 8 \quad [1] \\ x + 2y + 5z = 29 \quad [2] \\ x = 2y \quad [3] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sustitución} \\ [3] \rightarrow [1] \\ [3] \rightarrow [2] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2y + y + z = 8 \\ 2y + 2y + 5z = 29 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3y + z = 8 \cdot 5 \\ 4y + 5z = 29 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15y + 5z = 40 \\ 4y + 5z = 29 \end{cases} \quad \text{Restamos}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11y = 11 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2y = 2 \\ z = 8 - y - x = 5 \end{cases}$$

Solución: $x = 2$ billetes de 10 €
 $y = 1$ billetes de 20 €
 $z = 5$ billete de 50 €

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3y - 2x \leq 10 \\ x + y \leq 10 \\ y \geq x \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. Calcula en qué puntos de esa región alcanza sus valores máximo y mínimo la función $f(x, y) = 2x - 2y + 7$. (2,5 pt.)

Restricciones:
$$\begin{cases} 3y - 2x \leq 10 \\ x + y \leq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x \\ x \geq 1 \end{cases}$$

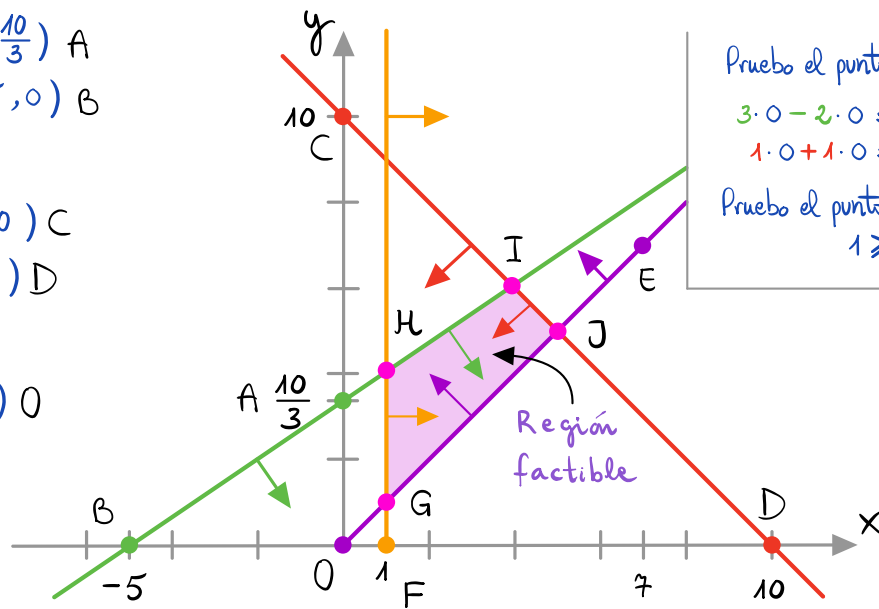
Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**.
Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\begin{cases} 3y - 2x = 10 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{10}{3} \quad (0, \frac{10}{3}) \text{ A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x = -5 \quad (-5, 0) \text{ B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y = 10 \quad (0, 10) \text{ C} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x = 10 \quad (10, 0) \text{ D} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y = 0 \quad (0, 0) \text{ O} \\ \text{Otro punto } (7, 7) \text{ E} \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow (1, 0) \text{ F}$$



Pruebo el punto $(0, 0)$
 $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \leq 10$ cumple
 $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 10$ cumple
 Pruebo el punto $(0, 1)$
 $1 \geq 0$ cumple

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\begin{cases} 3y - 2x = 10 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{10 + 2x}{3} = 4 \quad (1, 4) \text{ H}$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = 10 \\ x + y = 10 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases} + \begin{cases} 5y = 30 \Rightarrow y = 6 \\ x = 10 - y = 4 \end{cases} \quad (4, 6) \text{ I}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \\ y = x = 5 \end{cases} \quad (5, 5) \text{ J} \quad \begin{cases} y = x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow (1, 1) \text{ G}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 2x - 2y + 7$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: G, H, I, J

$$\begin{aligned} &G, f(1, 1) = 7 \quad I, f(4, 6) = 3 \\ &H, f(1, 4) = 1 \quad J, f(5, 5) = 7 \end{aligned}$$

Alcanza el mínimo en $(1, 4)$ con un valor de 1.
 Alcanza el máximo en todo el segmento que va de $(1, 1)$ a $(5, 5)$ con un valor de 7.

4. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de colectores A y B. Su producción semanal debe ser de por lo menos 10 colectores en total. El número de colectores de tipo B no puede superar en más de 10 al número de los de tipo A. Además, cada colector de tipo A tiene unos costes de producción de 150 € y cada colector de tipo B de 100 € y sólo se dispone de un máximo de 6000 € semanales para pagar el coste total de la producción.

Llamaremos :

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv \text{n}^\circ \text{ colectores tipo A} \\ y \equiv \text{n}^\circ \text{ colectores tipo B} \end{array} \right\}$$

a) Formula el sistema de inecuaciones (restricciones). Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,75 pt.)

b) Se sabe que cada colector de tipo A genera unos beneficios de 130 € y el de tipo B de 140 €. Escribe la función objetivo y calcula cuántos colectores de cada tipo tendrá que producir a la semana para que el beneficio total semanal sea máximo. (0,75 pt.)

Función objetivo: $f(x, y) = \underbrace{130x}_A + \underbrace{140y}_B$ (beneficio máximo)

Restricciones: $\left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 150x + 100y \leq 6000 \Rightarrow \div 50 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 ; y \geq 0 \\ \text{(No negatividad)} \end{array} \right\}$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**. Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

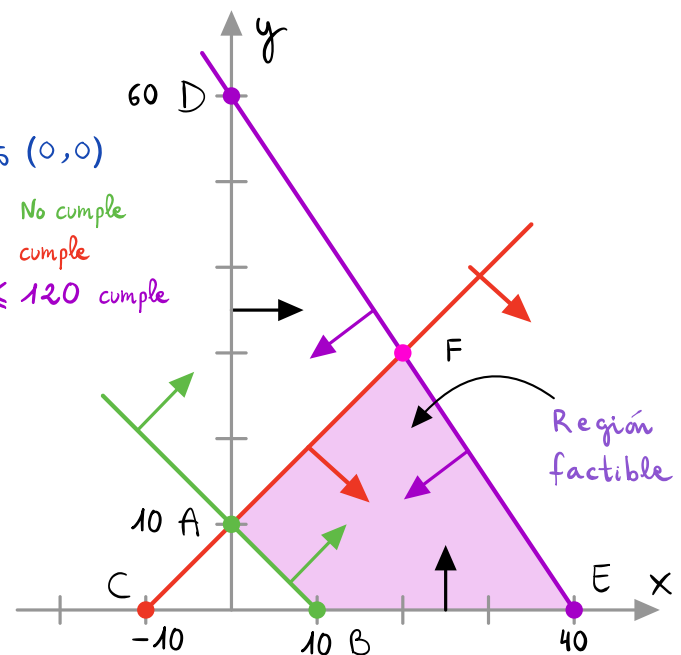
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 10 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=10 \quad (0, 10) \text{ A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=10 \quad (10, 0) \text{ B} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x + 10 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=10 \quad (0, 10) \text{ A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=-10 \quad (-10, 0) \text{ C} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=60 \quad (0, 60) \text{ D} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=40 \quad (40, 0) \text{ E} \end{array} \right.$$

Pruebo el punto (0,0)

$$\begin{array}{ll} 0+0 \geq 10 & \text{No cumple} \\ 0 \leq 0+10 & \text{cumple} \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 120 & \text{cumple} \end{array}$$



Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x + 10 \\ 3x + 2y = 120 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y = 2x + 20 \\ 3x + 2y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y - 2x = 20 \\ 3x + 2y = 120 \end{array} \right\} - \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x = 100 \Rightarrow x = 20 \\ y = x + 10 = 30 \end{array} \right.$$

Luego (20, 30) F

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 130x + 140y$ (beneficio máximo)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: B, A, F, E

$$\left. \begin{array}{l} B, f(10, 0) = 1300 \text{ €} \\ A, f(0, 10) = 1400 \text{ €} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} F, f(20, 30) = 6800 \text{ €} \\ E, f(40, 0) = 5200 \text{ €} \end{array} \right\}$$

Lograremos un beneficio máximo de 6800 € produciendo 20 colectores de tipo A y 30 de tipo B.