

MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula B^{-1} , la matriz inversa de B . (1 pt.)

b) Determina los valores de a y b que verifiquen la ecuación $A \cdot B^{-1} + 2 \cdot I = C^t$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1,5 pt.)

c) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro m . (1 pt.)

2. Una aerolínea ha vendido 400 billetes para un vuelo internacional. Son de 3 tipos: “*primera clase*”, A , “*clase business*”, B , y “*clase turista*”, C . Por cada 3 billetes del tipo B , se venden 10 del tipo C . Además, se venden el triple de billetes del tipo C que de A y B juntos. Calcula el número de billetes de cada tipo que se han vendido para este vuelo. (3 pt.)

3. Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de Blu-ray en el almacén A y otros 600 en el almacén B . Desea transportarlos a la tienda para tener al menos 900 reproductores a la venta y que los que provienen del almacén A no excedan el triple de los que vienen de B . Los costes unitarios de transporte son de 0,30 € por unidad desde el almacén A y 0,25 € por unidad desde el almacén B .

a) Formula el problema que permite determinar cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar los costes de transporte (restricciones + objetivo). (1,25 pt.)

b) Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)

c) ¿Cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿A cuánto asciende dicho coste? (0,75 pt.)

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula B^{-1} , la matriz inversa de B .

(1 pt.)

b) Determina los valores de a y b que verifiquen la ecuación $A \cdot B^{-1} + 2 \cdot I = C^t$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

(1,5 pt.)

a) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, calculamos su inversa. $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$, luego tiene inversa.

La matriz adjunta: $\left. \begin{matrix} B_{11} = 2, B_{12} = -4 \\ B_{21} = -1, B_{22} = 3 \end{matrix} \right\} \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot [\text{Adj}(B)]^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot B^{-1} + 2 \cdot I = C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a-4 & -\frac{a}{2}+3 \\ 1-2b & -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & -\frac{a}{2}+3 \\ 1-2b & \frac{3}{2}+\frac{3}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad ; \quad -\frac{a}{2}+3 = 2 \Rightarrow a = -1(-2) = 2 \\ 1-2b = -1 \Rightarrow b = \frac{-2}{-2} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{2}+\frac{3}{2}b = 3 \Rightarrow 3+3b = 6 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}$$

c) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro m . Veamos cuándo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (m-6) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m+1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|M| = (m-6) \cdot (m+1) - 3(3-m) = m^2 + m - 6m - 6 - 9 + 3m$$

$$|M| = m^2 - 2m - 15 = 0 \Rightarrow \text{tendría un rango menor que 3.}$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix}$$

Comprobamos las raíces:

$$-3 \cdot 5 = \frac{-15}{1} \checkmark$$

Si $m \neq 5$ y $m \neq -3$, la matriz M tiene rango 3.

Si $m = 5$ o $m = -3$, la matriz M tiene un rango menor que 3.

Puedo encontrar un menor de orden 2 cuyo determinante es distinto de cero.

$$|M| = 0 \Rightarrow \text{Rg } M < 3. \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } M = 2$$

2. Una aerolínea ha vendido 400 billetes para un vuelo internacional. Son de 3 tipos: "primera clase", A , "clase business", B , y "clase turista", C . Por cada 3 billetes del tipo B , se venden 10 del tipo C . Además, se venden el triple de billetes del tipo C que de A y B juntos. Calcula el número de billetes de cada tipo que se han vendido para este vuelo. (3 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Billetes tipo A} - x \\ \text{Billetes tipo B} - y \\ \text{Billetes tipo C} - z \end{array} \right\} \text{ Condiciones } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 400 \\ 3 \text{ tipo B} \text{ — } 10 \text{ tipo C} \\ y \text{ — } z \Rightarrow 3 \cdot z = 10 \cdot y \\ z = 3(x + y) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 400 \text{ [1]} \\ 3z = 10y \text{ [2]} \\ z = 3(x + y) \text{ [3]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} [3] \rightarrow [1] \\ [3] \rightarrow [2] \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 3(x + y) = 400 \\ 3z = 10y \Rightarrow 3 \cdot 3(x + y) = 10y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 4y = 400 \\ 9x + 9y = 10y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ 9x - y = 0 \end{array} \right. \text{ Sumamos}$$

$$10x = 100 \Rightarrow x = 10$$

$$x + y = 100 \Rightarrow$$

$$y = 100 - x = 100 - 10 = 90$$

$$3z = 10y \Rightarrow z = \frac{10y}{3} = \frac{10 \cdot 90}{3} = 300$$

$\Rightarrow$

Solución: $x = 10$ Billetes tipo A
 $y = 90$ Billetes tipo B
 $z = 300$ Billetes tipo C

3. Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de Blu-ray en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Desea transportarlos a la tienda para tener al menos 900 reproductores a la venta y que los que provienen del almacén A no excedan el triple de los que vienen de B. Los costes unitarios de transporte son de 0,30 € por unidad desde el almacén A y 0,25 € por unidad desde el almacén B.

- Formula el problema que permite determinar cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar los costes de transporte (restricciones + objetivo). (1,25 pt.)
- Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)
- ¿Cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿A cuánto asciende dicho coste? (0,75 pt.)

Restricciones: (No negatividad)

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 900 \\ x \leq 3y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \leq 750 \\ y \leq 600 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$x + y = 900$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=900 \Rightarrow (0, 900) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=900 \Rightarrow (900, 0) \text{ B}$$

$$x = 3y \text{ ; Ojo! Pasa por } (0, 0)$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0, 0) \text{ O}$$

$$\text{Si } x=900 \Rightarrow y=300 \Rightarrow (900, 300) \text{ C}$$

Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones:

cumplen en (0,0)

$$x \leq 750$$

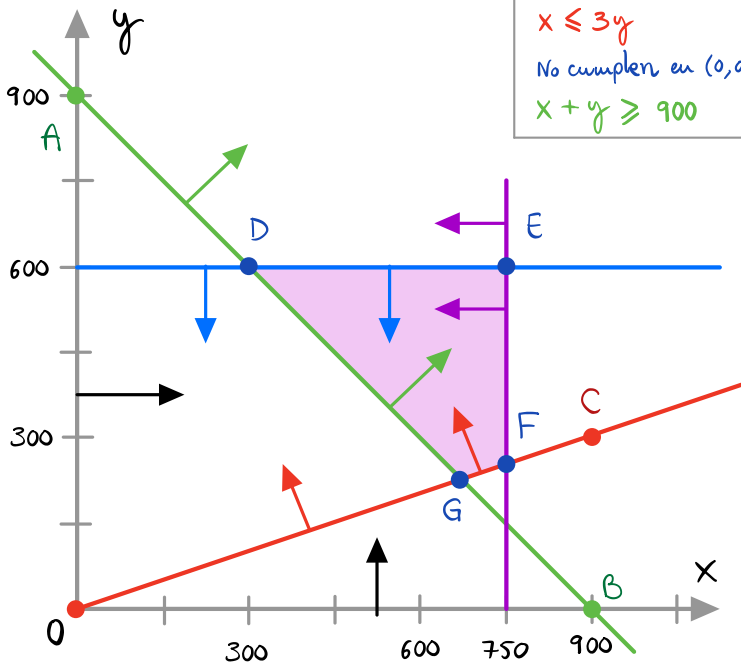
$$y \leq 600$$

cumplen en (0,1)

$$x \leq 3y$$

No cumplen en (0,0)

$$x + y \geq 900$$



Llamaremos:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv \text{n}^\circ \text{ reproductores de A} \\ y \equiv \text{n}^\circ \text{ reproductores de B} \end{array} \right\}$$

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{0,30}_1 x + \underbrace{0,25}_2 y$$

Almacén	Blueray	Coste €
A (x)	750	0,30
B (y)	600	0,25
Mínimo	900	

Queremos minimizar el coste por unidad.

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ y = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 900 - 600 = 300 \\ \Rightarrow (300, 600) \text{ D} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (750, 600) \text{ E} \\ \text{se ve directamente} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x = 750 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{750}{3} = 250 \Rightarrow (750, 250) \text{ F}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + y = 4y = 900 \Rightarrow y = \frac{900}{4} = 225 \\ \Rightarrow x = 3 \cdot 225 = 675 \Rightarrow (675, 225) \text{ G} \end{array} \right\}$$

La función objetivo es: $f(x, y) = 0,30x + 0,25y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la función objetivo: D, E, F, G,

$$\text{D, } f(300, 600) = 240 \text{ €}$$

$$\text{E, } f(750, 600) = 375 \text{ €}$$

$$\text{F, } f(750, 250) = 287,5 \text{ €}$$

$$\text{G, } f(675, 225) = 258,75 \text{ €}$$

Obtenemos un coste mínimo en el vértice D, es decir, enviando 300 reproductores del almacén A y 600 del almacén B con un coste mínimo de 240 €.