

## MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- a) Calcula  $A^{-1}$ , la matriz inversa de  $A$ . (1 pt.)
- b) Determina los valores de  $x$  que verifiquen la ecuación  $B \cdot A^{-1} + 2 \cdot I = C^t$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2. (1,5 pt.)
- c) Sea la matriz  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ m & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -m \end{pmatrix}$
- Calcula el rango de la matriz  $M$  en función de los valores del parámetro  $m$ . (1 pt.)
2. Una aerolínea ha vendido 300 billetes para un vuelo internacional. Son de 3 tipos: “*primera clase*”,  $A$ , “*clase business*”,  $B$ , y “*clase turista*”,  $C$ . Por cada 4 billetes del tipo  $B$ , se venden 10 del tipo  $C$ . Además, se venden el doble de billetes del tipo  $C$  que de  $A$  y  $B$  juntos. Calcula el número de billetes de cada tipo que se han vendido para este vuelo. (3 pt.)
3. Una tienda deportiva tiene en el almacén 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior y desea liquidar la mayor cantidad posible. Para eso lanza dos ofertas por lotes, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. Se desea ofrecer al menos 200 lotes de la oferta 1 y al menos 100 lotes de la oferta 2.
- a) Formula el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos (restricciones + objetivo). (1,25 pt.)
- b) Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)
- c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos? (0,75 pt.)

1. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula  $A^{-1}$ , la matriz inversa de  $A$ . (1 pt.)

b) Determina los valores de  $x$  que verifiquen la ecuación  $B \cdot A^{-1} + 2 \cdot I = C^t$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2. (1,5 pt.)

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , Calculamos su inversa.  $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0$ , luego tiene inversa.

La matriz adjunta:  $\left. \begin{matrix} A_{11} = 2, A_{12} = -3 \\ A_{21} = -3, A_{22} = 5 \end{matrix} \right\} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

b)  $B \cdot A^{-1} + 2 \cdot I = C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4-3x & 5x-6 \\ 2x-3 & 5-3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3x & 5x-6 \\ 2x-3 & 7-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6-3x = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2 \quad ; \quad 5x-6 = 4 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2 \\ 2x-3 = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad 7-3x = 1 \Rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2$$

c) Sea la matriz  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ m & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -m \end{pmatrix}$

Calcula el rango de la matriz  $M$  en función de los valores del parámetro  $m$ . Veamos cuándo  $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ m & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -m \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & -2 \end{vmatrix} = 7(1-4) - m(-4-m)$$

$$|M| = m^2 + 4m - 21 = 0 \Rightarrow \text{tendría un rango menor que 3.}$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{matrix} -7 \\ 3 \end{matrix}$$

Comprobamos las raíces:  
 $-7 \cdot 3 = \frac{-21}{1} \checkmark$

Si  $m \neq -7$  y  $m \neq 3$ , la matriz  $M$  tiene rango 3.

Si  $m = -7$  o  $m = 3$ , la matriz  $M$  tiene un rango menor que 3.

Puedo encontrar un menor de orden 2 cuyo determinante es distinto de cero.

$$|M| = 0 \Rightarrow \text{Rg } M < 3. \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } M = 2$$

2. Una aerolínea ha vendido 300 billetes para un vuelo internacional. Son de 3 tipos: "primera clase",  $A$ , "clase business",  $B$ , y "clase turista",  $C$ . Por cada 4 billetes del tipo  $B$ , se venden 10 del tipo  $C$ . Además, se venden el doble de billetes del tipo  $C$  que de  $A$  y  $B$  juntos. Calcula el número de billetes de cada tipo que se han vendido para este vuelo. (3 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Billetes tipo A} - x \\ \text{Billetes tipo B} - y \\ \text{Billetes tipo C} - z \end{array} \right\} \text{Condiciones} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 300 \\ 4 \text{ tipo B} \text{ — } 10 \text{ tipo C} \Rightarrow 4 \cdot z = 10 \cdot y \\ y \text{ — } z \Rightarrow 2 \cdot z = 5 \cdot y \\ z = 2(x + y) \end{array} \right.$$
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 300 \text{ [1]} \\ 2 \cdot z = 5 \cdot y \text{ [2]} \\ z = 2(x + y) \text{ [3]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} [1] \cdot 2 \\ [3] \rightarrow [1] \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 600 \Rightarrow 3z = 600 \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_z \Rightarrow z = \frac{600}{3} = 200 \end{array} \right.$$

$$2 \cdot z = 5 \cdot y \Rightarrow y = \frac{2z}{5} = \frac{2 \cdot 200}{5} = 80$$

$$x = 300 - y - z = 300 - 80 - 200 = 20 \Rightarrow$$

Solución:  $x = 20$  Billetes tipo A  
 $y = 80$  Billetes tipo B  
 $z = 200$  Billetes tipo C

3. Una tienda deportiva tiene en el almacén 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior y desea liquidar la mayor cantidad posible. Para eso lanza dos ofertas por lotes, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. Se desea ofrecer al menos 200 lotes de la oferta 1 y al menos 100 lotes de la oferta 2.

Llamaremos :

$$\begin{cases} x \equiv \text{n}^\circ \text{ lotes de 1} \\ y \equiv \text{n}^\circ \text{ lotes de 2} \end{cases}$$

Función objetivo :

$$f(x, y) = 30x + 50y$$

$\underbrace{\quad}_1 \quad \underbrace{\quad}_2$

- a) Formula el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos (restricciones + objetivo). (1,25 pt.)
- b) Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)
- c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos? (0,75 pt.)

Restricciones:

(No negatividad)

$$\begin{cases} x + 3y \leq 2000 \\ x + y \leq 1000 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 100 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes  $x=0$  e  $y=0$ .

$$x + 3y = 2000$$

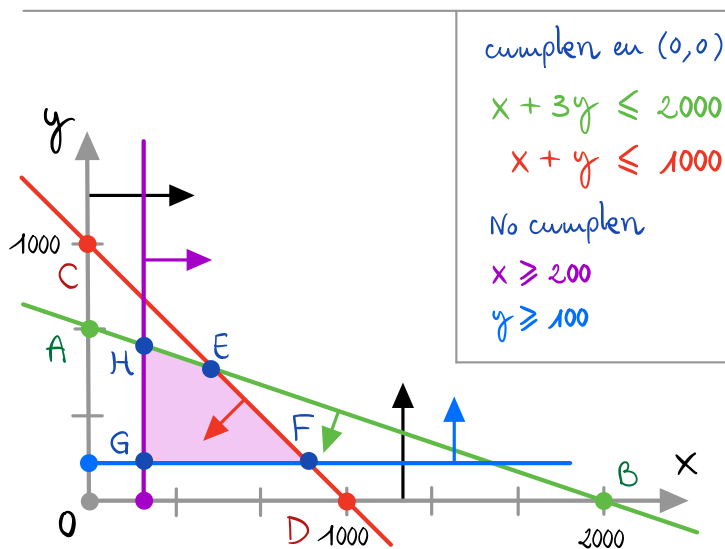
$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{2000}{3} \Rightarrow (0, \frac{2000}{3}) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 2000 \Rightarrow (2000, 0) \text{ B}$$

$$x + y = 1000$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1000 \Rightarrow (0, 1000) \text{ C}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 1000 \Rightarrow (1000, 0) \text{ D}$$



$(200, 100)$  G se ve directamente

cumplen en  $(0,0)$

$$x + 3y \leq 2000$$

$$x + y \leq 1000$$

No cumplen

$$x \geq 200$$

$$y \geq 100$$

| Lote   | Camisetas | Chándales | Precio € |
|--------|-----------|-----------|----------|
| 1 (x)  | 1         | 1         | 30       |
| 2 (y)  | 3         | 1         | 50       |
| Máximo | 2000      | 1000      |          |

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\begin{cases} x + 3y = 2000 \\ x + y = 1000 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 1000 \Rightarrow y = 500 \\ \Rightarrow x = 500, (500, 500) \text{ E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ y = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1000 - 100 = 900 \\ \Rightarrow (900, 100) \text{ F} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 2000 \\ x = 200 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2000 - 200}{3} = 600 \\ \Rightarrow (200, 600) \text{ H} \end{cases}$$

La función objetivo es:  $f(x, y) = 30x + 50y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la función objetivo : E, F, G, H,

$$\text{E, } f(500, 500) = 40.000 \text{ €}$$

$$\text{F, } f(900, 100) = 32.000 \text{ €}$$

$$\text{G, } f(200, 100) = 11.000 \text{ €}$$

$$\text{H, } f(200, 600) = 36.000 \text{ €}$$

Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones:

Obtenemos el ingreso máximo en el vértice E, es decir, vendiendo 500 lotes tipo 1 y 500 lotes tipo 2 con un ingreso de 40.000 €.