

MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz X que verifica $A \cdot X + B = C$. (2,5 pt.)

b) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -3$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2r & 2s & 2t \\ x & y & z \\ -5a & -5b & -5c \end{vmatrix}$ (1 pt.)

2. Deseamos invertir una cantidad de 3.000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas A , B y C . Invertimos en A la misma cantidad que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A dieron intereses del 6%, las de B un 10% y las acciones de C un 14%. Como consecuencia, obtuvimos un beneficio de 260 €. Determina cuánto invertimos en cada una de las empresas. (3 pt.)
3. Una tienda de comestibles quiere preparar para la campaña navideña dos tipos de lotes de productos, A y B . El lote A incluye 4 tabletas de turrón, 2 botellas de cava y 2 paquetes de polvorones, mientras que el lote B incluye 2 tabletas de turrón, 2 botellas de cava y 4 paquetes de polvorones. Con cada lote de tipo A obtendremos un beneficio de 4,5 euros y con cada lote de tipo B un beneficio de 3 euros. Sabiendo que la tienda dispone en su almacén de un máximo de 28 tabletas de turrón, 16 botellas de cava y 28 paquetes de polvorones, determina la región factible y cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar el beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso? ¿Es posible la combinación de 3 lotes de tipo A y 6 lotes de tipo B ? (3,5 pt.)

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz X que verifica $A \cdot X + B = C$. (2,5 pt.)

b) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -3$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2r & 2s & 2t \\ x & y & z \\ -5a & -5b & -5c \end{vmatrix}$ (1 pt.)

$$\begin{aligned} a) \quad A \cdot X + B &= C \\ A \cdot X &= C - B \Rightarrow \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \underbrace{A^{-1} \cdot A \cdot X}_{I} = A^{-1} \cdot (C - B) \\ \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B) \end{array} \right.$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculamos su inversa. $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, luego tiene inversa.

La matriz adjunta: $\left. \begin{array}{l} A_{11} = 2, A_{12} = -1 \\ A_{21} = 0, A_{22} = -1 \end{array} \right\} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

b) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -3$ Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2r & 2s & 2t \\ x & y & z \\ -5a & -5b & -5c \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2r & 2s & 2t \\ x & y & z \\ -5a & -5b & -5c \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} = -(-10) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix}}_{-3} = 10 \cdot (-3) = -30$$

Sale un signo menos

2. Deseamos invertir una cantidad de 3.000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas A, B y C. Invertimos en A la misma cantidad que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A dieron intereses del 6%, las de B un 10% y las acciones de C un 14%. Como consecuencia, obtuvimos un beneficio de 260 €. Determina cuánto invertimos en cada una de las empresas. (3 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Inversión empresa A} - x \\ \text{Inversión empresa B} - y \\ \text{Inversión empresa C} - z \end{array} \right\} \text{Condiciones} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3.000 \\ x = y + z \\ \frac{6 \cdot x}{100} + \frac{10 \cdot y}{100} + \frac{14 \cdot z}{100} = 260 \Rightarrow \\ 6 \cdot x + 10 \cdot y + 14 \cdot z = 26000 \div 2 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3.000 \quad [1] \\ x = y + z \quad [2] \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y + 7 \cdot z = 13000 \quad [3] \end{array} \right\} [2] \rightarrow [1] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3.000 \\ x + x = 3.000 \\ 2x = 3.000 \Rightarrow x = 1.500 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} [3] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot x + 5 \cdot y + 7 \cdot z = 13000, \quad x = 1.500 \\ 3 \cdot 1500 + 5 \cdot y + 7 \cdot z = 13000 \Rightarrow 5 \cdot y + 7 \cdot z = 13000 - 4500 = 8500 \\ [2] \quad y + z = 1500 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} 5 \cdot y + 7 \cdot z = 8500 \\ y + z = 1500 \cdot 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 5 \cdot y + 7 \cdot z = 8500 \\ 5 \cdot y + 5 \cdot z = 7500 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Restamos} \\ 2 \cdot z = 1000 \Rightarrow z = 500 \end{array} \end{array}$$

Finalmente $x = y + z \Rightarrow y = x - z = 1500 - 500 = 1.000$

Solución: $x = 1.500 \text{ €}$ Inversión empresa A
 $y = 1.000 \text{ €}$ Inversión empresa B
 $z = 500 \text{ €}$ Inversión empresa C

3. Una tienda de comestibles quiere preparar para la campaña navideña dos tipos de lotes de productos, A y B. El lote A incluye 4 tabletas de turrón, 2 botellas de cava y 2 paquetes de polvorones, mientras que el lote B incluye 2 tabletas de turrón, 2 botellas de cava y 4 paquetes de polvorones. Con cada lote de tipo A obtendremos un beneficio de 4,5 euros y con cada lote de tipo B un beneficio de 3 euros. Sabiendo que la tienda dispone en su almacén de un máximo de 28 tabletas de turrón, 16 botellas de cava y 28 paquetes de polvorones, determina la región factible y cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar el beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso? ¿Es posible la combinación de 3 lotes de tipo A y 6 lotes de tipo B?

Llamaremos :

$$\begin{cases} x \equiv \text{n}^\circ \text{ lotes de A} \\ y \equiv \text{n}^\circ \text{ lotes de B} \end{cases}$$

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{4,5x}_A + \underbrace{3y}_B$$

(3,5 pt.)

Restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 28 \\ 2x + 2y \leq 16 \\ 2x + 4y \leq 28 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\text{No negatividad})$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$4x + 2y = 28$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=14 \Rightarrow (0, 14) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=7 \Rightarrow (7, 0) \text{ B}$$

$$2x + 2y = 16$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow (0, 8) \text{ C}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow (8, 0) \text{ D}$$

$$2x + 4y = 28$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=7 \Rightarrow (0, 7) \text{ E}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=14 \Rightarrow (14, 0) \text{ F}$$

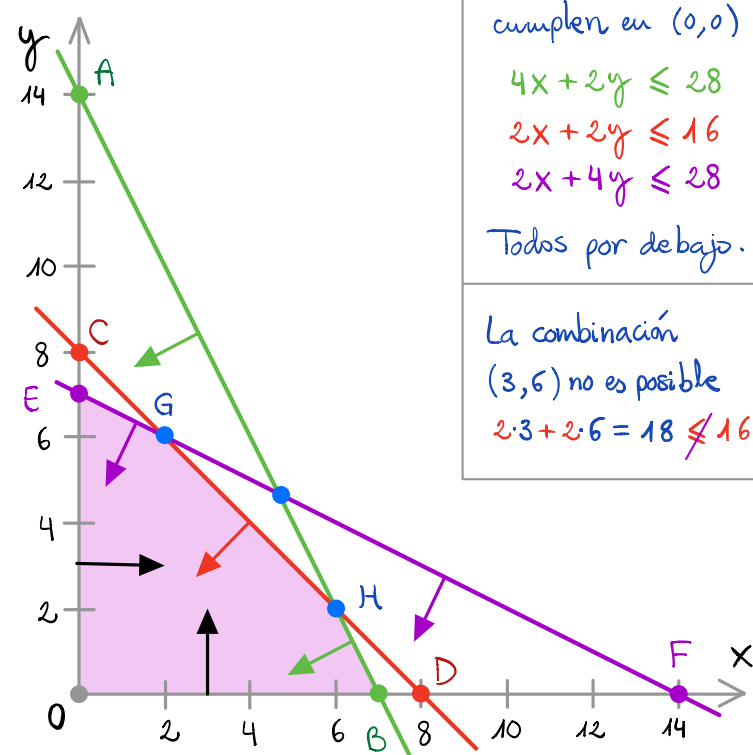
Lote	Turrón	Cava	Polvorones	Precio €
A(x)	4	2	2	4,5
B(y)	2	2	4	3
Máximo	28	16	28	

Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones:

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ 2x + 4y = 28 \end{cases} \quad - \quad \begin{aligned} 2y &= 12 \Rightarrow y = 6 \\ \Rightarrow x &= 2, (2, 6) \text{ G} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ 4x + 2y = 28 \end{cases} \quad - \quad \begin{aligned} 2x &= 12 \Rightarrow x = 6 \\ \Rightarrow y &= 2, (6, 2) \text{ H} \end{aligned}$$



La función objetivo es: $f(x, y) = 4,5x + 3y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la función objetivo : 0, E, G, H, B

$$0, f(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$E, f(0, 7) = 3 \cdot 7 = 21 \text{ €}$$

$$G, f(2, 6) = 4,5 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 27 \text{ €}$$

$$H, f(6, 2) = 4,5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 33 \text{ €}$$

$$B, f(7, 0) = 4,5 \cdot 7 = 31,5 \text{ €}$$

Obtenemos el beneficio máximo en el vértice H(6,2), es decir, vendiendo 6 lotes tipo A y 2 lotes tipo B con un beneficio de 33 €.