

MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A - I$. (1 pt.)

b) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A = B + X$. (0,75 pt.)

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ (0,75 pt.)

2. La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400 €. Las acciones de la empresa textil pagan un 2 % de interés anual, las de la empresa de gas, un 4 % y las de la compañía de telefonía pagan un 5 %. La suma del interés anual es de 278 €. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000 € menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas. Calcula la cantidad invertida en cada una de las acciones. (2,5 pt.)

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible.

b) Verifica analíticamente si el punto $(-1,2)$ pertenece a la región factible.

c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 15x - 10y$. (2,5 pt.)

4. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 €. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 €.
- ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos?
Determina los ingresos. (2,5 pt.)

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A - I$.

(1 pt.)

b) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A = B + X$.

(0,75 pt.)

a) Calcula $(A-I)^{-1}$, $A - I = C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4-1) - 3(-2-1) = -9+10 = -1$$

$|A - I| \neq 0$, luego tiene inversa.

Para calcular la inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot A = B + X$

$$X \cdot A - X = B$$

$$X \cdot (A - I) = B$$

$$X \cdot \underbrace{(A - I) \cdot (A - I)^{-1}}_I = B \cdot (A - I)^{-1}$$

$$X = B \cdot (A - I)^{-1}$$

$$X = B \cdot (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow \text{factor común } (-2)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot (-5) = -10$$

2. La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400 €. Las acciones de la empresa textil pagan un 2% de interés anual, las de la empresa de gas, un 4% y las de la compañía de telefonía pagan un 5%. La suma del interés anual es de 278 €. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000 € menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas. Calcula la cantidad invertida en cada una de las acciones. (2,5 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ inversión textil } 2\% \text{ de interés} \\ y \text{ inversión gas } 4\% \text{ de interés} \\ z \text{ inversión telefonía } 5\% \text{ de interés} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y + z = 7400 \text{ €} \\ \frac{2 \cdot x}{100} + \frac{4 \cdot y}{100} + \frac{5 \cdot z}{100} = 278 \text{ €} \\ z = x + y - 1000 \text{ €} \end{array} \right\} \text{Ecuaciones lineales}$$

Resolvemos el sistema por reducción.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7400 \\ -x - y + z = -1000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumamos para} \\ \text{cancelar } x \text{ e } y. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2z = 6400 \\ z = \frac{6400}{2} = 3200 \text{ €} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 3200 = 7400 \Rightarrow x + y = 4200 \Rightarrow 2x + 2y = 8400 \\ 2x + 4y + 5z = 27800 \Rightarrow 2x + 4y = 11800 \Rightarrow 2x + 4y = 11800 \end{array} \right\} \text{Restamos}$$

$$2y = 3400 \Rightarrow y = \frac{3400}{2} = 1700 \text{ €} ; \text{ finalmente}$$

$$x = 7400 - y - z = 7400 - 1700 - 3200 = 2500 \text{ €}$$

Invertiremos 2500 € en textil, 1700 € en gas y 3200 € en telefonía.

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible.

b) Verifica analíticamente si el punto $(-1, 2)$ pertenece a la región factible.

c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 15x - 10y$.

(2,5 pt.)

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$2x + 3y = -6$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0, -2) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0) \text{ B}$$

$$7x + 4y = 5$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow (0, \frac{5}{4}) \text{ C}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = \frac{5}{7} \Rightarrow (\frac{5}{7}, 0) \text{ D}$$

$$-3x + 2y = 9$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \Rightarrow (0, \frac{9}{2}) \text{ E}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0) \text{ F=B}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

Necesito calcular los puntos G y H.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 7x + 4y = 5 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14x + 21y = -42 \\ 14x + 8y = 10 \end{cases} \cdot \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \Rightarrow$$

$$13y = -52 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = 3$$

$$(3, -4) \text{ G}$$

$$\begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ -3x + 2y = 9 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ -6x + 4y = 18 \end{cases} \cdot \begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$$

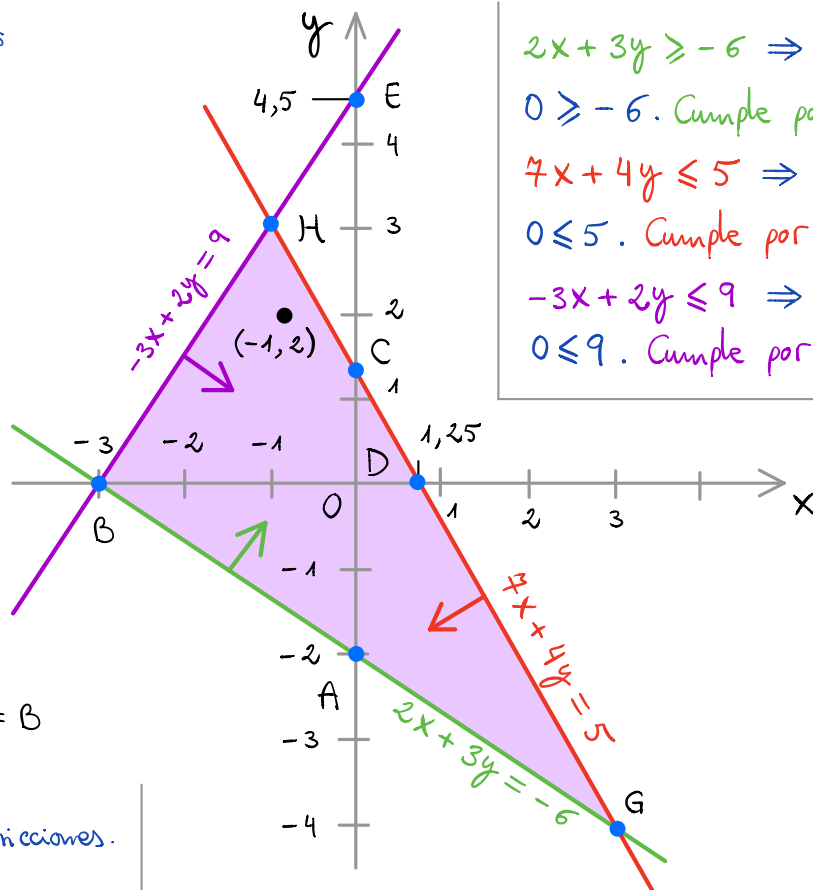
$$13x = -13 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 3$$

$$(-1, 3) \text{ H}$$

El punto $(-1, 2)$ está dentro de la región factible. Cumple todas las condiciones.

Para evaluar la región factible, evalúo cualquier punto por encima o por debajo de la recta para ver si cumple. Por ejemplo el $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq -6 \Rightarrow 0 \geq -6. \text{ Cumple por encima} \\ 7x + 4y &\leq 5 \Rightarrow 0 \leq 5. \text{ Cumple por debajo} \\ -3x + 2y &\leq 9 \Rightarrow 0 \leq 9. \text{ Cumple por debajo} \end{aligned}$$



La función objetivo es: $f(x, y) = 15x - 10y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: B, H, G

$$\text{B, } f(-3, 0) = 15 \cdot (-3) = -45$$

$$\text{H, } f(-1, 3) = -15 - 30 = -45$$

$$\text{G, } f(3, -4) = 15 \cdot 3 - 10 \cdot (-4) = 85$$

La función alcanza un máximo en el vértice $G(3, -4)$ con un valor de 85.

La función alcanza un mínimo en todo el segmento que une los vértices $B(-3, 0)$ y $H(-1, 3)$ con un valor de -45.

4. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 €. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 €.
- ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos?
Determina los ingresos. (2,5 pt.)

Llamaremos : $x \equiv n^{\circ}$ paquetes de A
 $y \equiv n^{\circ}$ paquetes de B

Función objetivo : $f(x,y) = \underbrace{1,5x}_A + \underbrace{2y}_B$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 30 \\ 2x + y \leq 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad \text{(No negatividad)}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$x + y = 10$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=10 \Rightarrow (0,10) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=10 \Rightarrow (10,0) \text{ B}$$

$$2x + 4y = 30$$

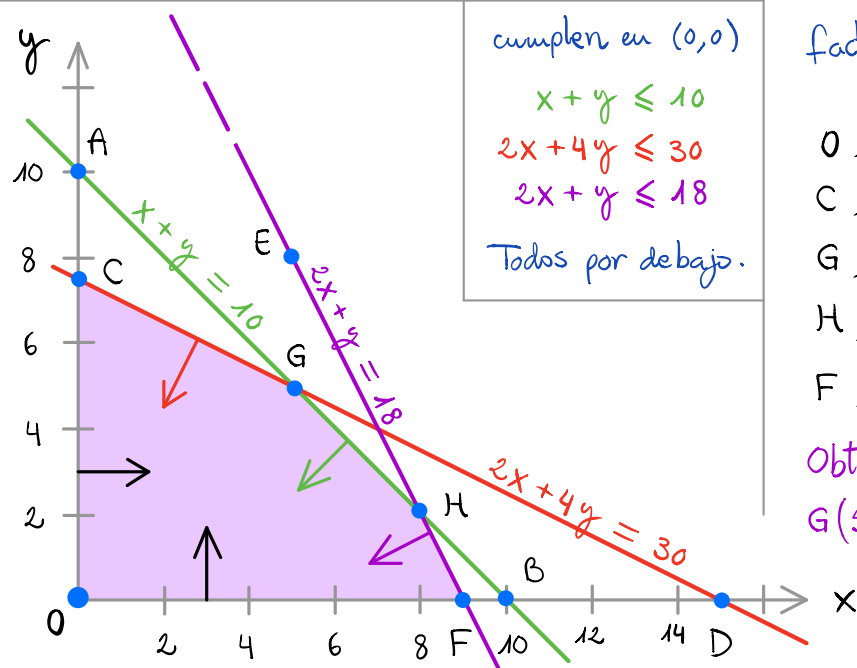
$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{15}{2} \Rightarrow (0, \frac{15}{2}) \text{ C}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=15 \Rightarrow (15,0) \text{ D}$$

$$2x + y = 18 \text{ Pruebo puntos distintos del 0.}$$

$$\text{Si } x=5 \Rightarrow y=8 \Rightarrow (5,8) \text{ E}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=9 \Rightarrow (9,0) \text{ F}$$



Paquete	Pipas	Chicles	Bombones	Precio €
A(x)	1	2	2	1,5
B(y)	1	4	1	2
Máximo	10	30	18	

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 30 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ 2x + 4y = 30 \end{array} \quad -$$

$$2y = 10 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 5, (5,5) \text{ G}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2x + y = 18 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ 2x + y = 18 \end{array} \quad -$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 8, (8,2) \text{ H}$$

La **función objetivo** es: $f(x,y) = 1,5x + 2y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, C, G, H, F

$$O, f(0,0) = 0 \in$$

$$C, f(0, \frac{15}{2}) = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15 \in$$

$$G, f(5,5) = 1,5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 17,5 \in$$

$$H, f(8,2) = 1,5 \cdot 8 + 2 \cdot 2 = 16 \in$$

$$F, f(9,0) = 1,5 \cdot 9 = 13,5 \in$$

Obtenemos el beneficio máximo en el vértice G(5,5), es decir, vendiendo 5 paquetes de cada tipo con un beneficio de 17,5 €.