

MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula los valores de m para que la matriz A no tenga inversa. (0,5 pt.)
b) Haciendo $m = 2$ calcula la matriz inversa de A (0,75 pt.)
c) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A = (1 \ 0 \ -1)$ (0,75 pt.)

d) Se sabe que $|C| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x + 2a & y + 2b & z + 2c \\ a + x + p & b + y + q & c + z + r \end{vmatrix}$ (0,5 pt.)

Calcula el valor de $|2 \cdot C^{-1}|$ (0,5 pt.)

2. Un tren transporta 70 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 999 €. Calcule cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 27 €, cuántos han pagado el 30 % del billete y cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 30 % es el doble del número de viajeros que pagan el billete entero. (2 pt.)

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3x + 4y \geq -6 \\ -x + 2y \leq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Verifica si el punto $(-1, 1)$ pertenece a la región factible.
c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = -2x + 4y$. (2,5 pt.)

4. Vamos a invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B. El producto A proporciona un beneficio del 10% y B del 5%. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

(2,5 pt.)

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcula los valores de m para que la matriz A no tenga inversa.
- Haciendo $m = 2$ calcula la matriz inversa de A
- Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Para que la matriz A no tenga inversa, $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -m \cdot \begin{vmatrix} 1 & m \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = -m \cdot m + (-1 + 6) = -m^2 + 5 = 0 \Rightarrow m^2 = 5 \Rightarrow \text{Si } m = \pm\sqrt{5} \text{ no tiene inversa.}$$

b) $m = 2$. Calcula A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(-6) + (-5) = 1 \neq 0 \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D

c) Calcula X en $X \cdot A = (1 \ 0 \ -1)_{1 \times 3}$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = (1 \ 0 \ -1) \cdot A^{-1}$$

$$X = (1 \ 0 \ -1) \cdot A^{-1} = (1 \ 0 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 1)$$

Comprobación: $X \cdot A = (1 \ 3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ -1) \quad \text{Q.E.D.}$

d) Se sabe que $|C| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix}$

Calcula el valor de $|2 \cdot C^{-1}|$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x+p & y+q & z+r \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}}_{|C|=6 \text{ (enunciado)}} = 6$$

$\uparrow$ $F_2 \rightarrow F_2 - 2 \cdot F_1$ $\uparrow$ $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$
 $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$

$$|2 \cdot C^{-1}| = 2^3 \cdot |C^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{|C|} = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$$

2. Un tren transporta 70 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 999 €. Calcule cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 27 €, cuántos han pagado el 30 % del billete y cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 30 % es el doble del número de viajeros que pagan el billete entero. (2 pt.)

$x \equiv$ viajeros que pagan 27 €
 $y \equiv$ viajeros que pagan el 30%
 $z \equiv$ viajeros que pagan el 50%

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ 27 \cdot x + \frac{30}{100} \cdot 27 \cdot y + \frac{50}{100} \cdot 27 \cdot z &= 999 \\ y &= 2 \cdot x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Simplificamos} \\ \cdot 100 \div 90 \\ \text{reordenamos} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ 30x + 9y + 15z &= 1.110 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \div 3 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 70 \quad (1) \\ 10x + 3y + 5z &= 370 \quad (2) \\ 2x - y &= 0 \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss. Reordenamos las filas:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 10 & 3 & 5 & 370 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 10 \cdot F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2 \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -7 & -5 & -330 \\ 0 & -3 & -2 & -140 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow 7 \cdot F_3 - 3 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -7 & -5 & -330 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

$$F_3: z = 10$$

$$F_2: -7y - 5z = -330$$

$$y = \frac{-330 + 5 \cdot 10}{-7} = 40$$

$$F_1: x + y + z = 70$$

$$x = 70 - y - z = 70 - 40 - 10$$

$$x = 20$$

Sistema Compatible Determinado

$$x = 20, y = 40, z = 10$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{viajeros que pagan 27 €} \\ \text{viajeros que pagan el 30\%} \\ \text{viajeros que pagan el 50\%} \end{array}$$

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
- $$\begin{cases} 3x + 4y \geq -6 \\ -x + 2y \leq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$
- $y \geq \frac{-6-3x}{4}$ por encima
 $y \leq \frac{2+x}{2}$ por debajo
 $x \leq 2$ a la izquierda
- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Verifica si el punto $(-1, 1)$ pertenece a la región factible.
c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = -2x + 4y$.

a) Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$3x + 4y = -6$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow (0, -\frac{3}{2}) \text{ B}$$

$$-x + 2y = 2$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ C}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

Necesito calcular los puntos D y E.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -6 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, -3) \text{ D}$$

$$y = \frac{-6-3x}{4} = \frac{-6-3 \cdot 2}{4} = -3$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 2) \text{ E}$$

$$y = \frac{2+x}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

b) Comprobamos el punto $P(-1, 1)$ en todas las restricciones.

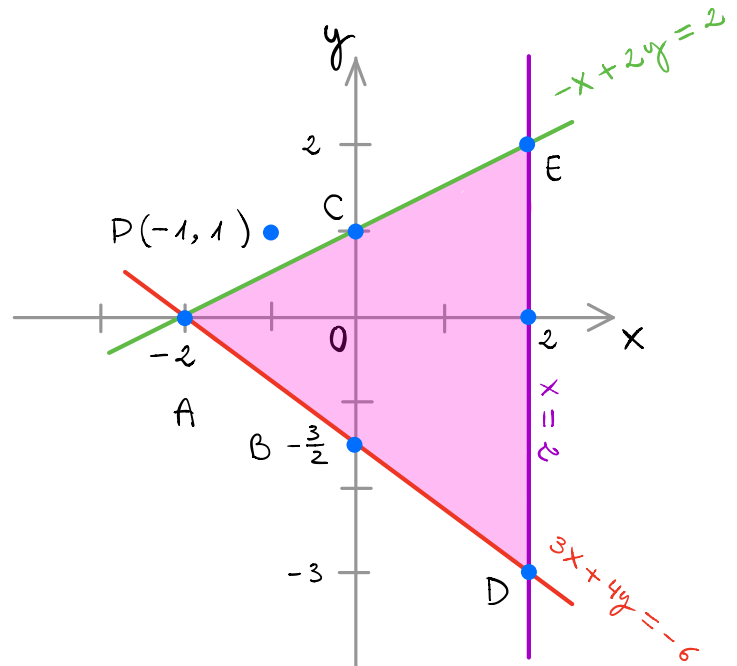
$$3x + 4y \geq -6$$

$$3(-1) + 4 \cdot 1 = 1 \geq -6$$

$$-x + 2y \leq 2$$

$$-(-1) + 2 \cdot 1 = 3 \not\leq 2 \text{ No cumple}$$

No pertenece a la región factible.



c) La función objetivo es: $f(x, y) = -2x + 4y$
Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: A, D, E

$$\left. \begin{aligned} f(-2, 0) &= -2 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 = 4 \\ f(2, -3) &= -2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -16 \\ f(2, 2) &= -2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 4 \end{aligned} \right\}$$

El mínimo se produce en $x=2, y=-3$ (vértice D) con un valor de -16

El máximo se produce en los vértices A y E con un valor de 4

$\begin{cases} (-2, 0) \text{ A} \\ (2, 2) \text{ E} \end{cases}$ Son solución todos los puntos del segmento $\overline{AE}$ (infinitas soluciones)

4. Vamos a invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B. El producto A proporciona un beneficio del 10% y B del 5%. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

Producto	Beneficios	Mínimo
A (x)	10% = 0,1	
B (y)	5% = 0,05	
Máximo	12.000 €	

Llamaremos : $x \equiv$ Inversión en A
 $y \equiv$ Inversión en B

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{0,1 \cdot x}_A + \underbrace{0,05 \cdot y}_B \quad (\text{máximo beneficio})$$

Restricciones: $\left. \begin{array}{l} y \geq 3.000 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 12.000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad (\text{No negatividad})$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:
 Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$x = 2y$ Si $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$ O

Si $x=12.000 \Rightarrow y=6.000 \Rightarrow (12.000, 6.000)$ A

$x + y = 12.000$

Si $y=0 \Rightarrow x=12.000 \Rightarrow (12.000, 0)$ B

Si $x=0 \Rightarrow y=12.000 \Rightarrow (0, 12.000)$ C

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular los puntos

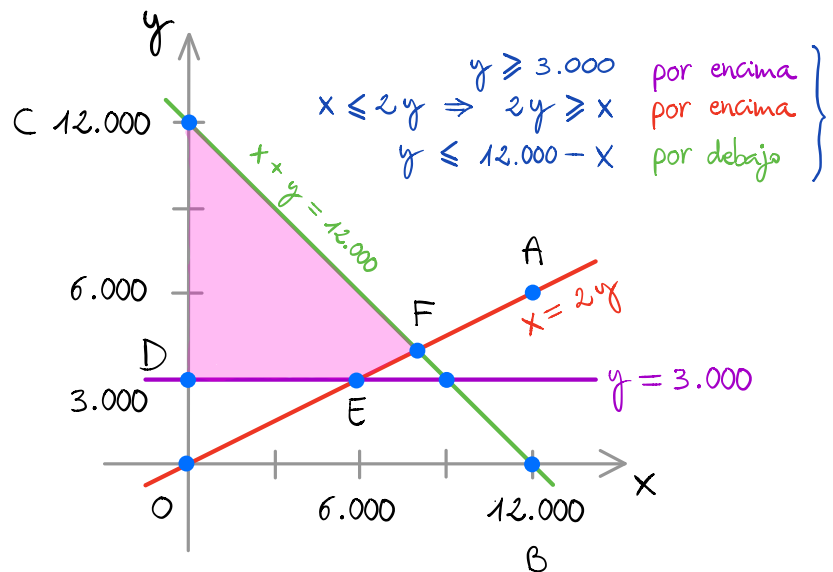
D, E, F $(0, 3000)$ D

$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ y = 3.000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 6.000 \\ (6.000, 3.000) \text{ E} \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + y = 12.000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2y + y = 12.000 \\ y = \frac{12.000}{3} = 4.000 \Rightarrow x = 8.000 \end{array}$

$y = \frac{12.000}{3} = 4.000 \Rightarrow x = 8.000$

$(8.000, 4.000)$ F



La **función objetivo** es: $f(x, y) = 0,1 \cdot x + 0,05 \cdot y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : C, D, E, F

$\left. \begin{array}{l} f(0, 12.000) = 600 \text{ €} \\ f(0, 3000) = 150 \text{ €} \\ f(6.000, 3.000) = 750 \text{ €} \\ f(8.000, 4.000) = 1.000 \text{ €} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{El máximo se produce} \\ \text{en } \begin{cases} x = 8.000 \\ y = 4.000 \end{cases} \\ (\text{vértice F}) \end{array}$

Si invertimos 8.000 € en el tipo A y 4.000 € en el tipo B, obtendremos un beneficio máximo de 1.000 €.