

MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$ (0,75 pt.)

b) Haciendo $a = 1$ y $b = 0$ calcula la matriz inversa de B (0,5 pt.)

c) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$ (0,75 pt.)

d) Se sabe que $|C| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$ (0,5 pt.)

Calcula el valor de $|2 \cdot C^{-1}|$ (0,5 pt.)

2. Una empresa ha invertido 73.000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases A, B y C, cuyos costes por unidad son de 2.400 €, 1.200 € y 1.000 €, respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo A ha sido la misma que la invertida en los de tipo B, averigua cuántos aparatos ha comprado de cada clase. (2 pt.)

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible.

b) Verifica si el punto $(-1, 2)$ pertenece a la región factible.

c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$. (2,5 pt.)

4. Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B. El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio. (2,5 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

- Calcula los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$
- Haciendo $a = 1$ y $b = 0$ calcula la matriz inversa de B
- Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix},$$

Igualamos los coeficientes

$$12 = 3b \Rightarrow b = 4$$

$$2 = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$3b = 12 \Rightarrow b = 4$$

(coincide con las otras condiciones)

b) Haciendo $a = 1$ y $b = 0$ calcula la matriz inversa de B

c) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$

$$b) \quad a = 1, b = 0, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{luego tiene inversa.}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot [\text{Adj}(B)]^t, \quad \text{La matriz adjunta: } \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\text{Adj}(B)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } B \cdot B^{-1} = I, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

$$c) \quad X \cdot B - A = I$$

$$X \cdot B = I + A$$

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = (I + A) \cdot B^{-1}$$

$$X = (I + A) \cdot B^{-1}$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (I + A) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } X \cdot B = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I + A \quad \text{Q.E.D.}$$

d) Se sabe que $|C| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$

Calcula el valor de $|2 \cdot C^{-1}|$

$$|2 \cdot C^{-1}| = 2^3 \cdot |C^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{|C|} = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} \xrightarrow{C^t} \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = 6$$

$|C| = 6$ (enunciado)

2. Una empresa ha invertido 73.000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases A, B y C, cuyos costes por unidad son de 2.400 €, 1.200 € y 1.000 €, respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo A ha sido la misma que la invertida en los de tipo B, averigua cuántos aparatos ha comprado de cada clase. (2 pt.)

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{ordenadores de clase A} \\ y &\equiv \text{ordenadores de clase B} \\ z &\equiv \text{ordenadores de clase C} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 2400 \cdot x + 1200 \cdot y + 1000 \cdot z &= 73.000 \\ x + y + z &= 55 \\ 2400 \cdot x &= 1200 \cdot y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Simplificamos} \\ &\div 100 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 24x + 12y + 10z &= 730 \\ x + y + z &= 55 \\ 24x &= 12y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\div 2 \\ &\div 12 \end{aligned} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 12x + 6y + 5z &= 365 \\ x + y + z &= 55 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \\ &(3) \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss. Reordeno las filas:

$$\begin{aligned} (2) &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 55 \end{array} \right) \\ (3) &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ (1) &\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 6 & 5 & 365 \end{array} \right) \end{aligned} \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2 \cdot F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 12 \cdot F_1}} \begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 55 \\ 0 & -3 & -2 & -110 \\ 0 & -6 & -7 & -295 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 55 \\ 0 & -3 & -2 & -110 \\ 0 & 0 & -3 & -75 \end{array} \right)$$

$$F_3: -3z = -75 \Rightarrow z = 25$$

$$F_2: -3y - 2z = -110$$

$$y = \frac{-110 + 2 \cdot 25}{-3} = 20$$

$$F_1: x + y + z = 55$$

$$x = 55 - y - z = 55 - 20 - 25$$

$$x = 10$$

Sistema Compatible Determinado

$$x = 10, y = 20, z = 25$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{aligned} &\text{ordenadores de clase A} \\ &\text{ordenadores de clase B} \\ &\text{ordenadores de clase C} \end{aligned}$$

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
- $$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \leq x + 1 \text{ por debajo} \\ x + y \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 - x \text{ por encima} \\ 3x + y \leq 13 \Rightarrow y \leq 13 - 3x \text{ por debajo} \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Verifica si el punto $(-1, 2)$ pertenece a la región factible.
c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$.

a) Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x - y + 1 = 0$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0, 1) \text{ B}$$

$$x + y = 1$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0, 1) \text{ B}$$

$$3x + y = 13$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=13/3 \Rightarrow (4,3) \text{ D}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=13 \Rightarrow (0, 13) \text{ E}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

Necesito calcular los puntos F y G.

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} + \quad \begin{cases} 4x + 1 = 13 \\ x = \frac{12}{4} = 3 \\ y = x + 1 = 4 \end{cases}$$

$$(3, 4) \text{ F}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x + y = 1 \end{cases} - \quad \begin{cases} 2x = 12 \Rightarrow \\ x = 6 \Rightarrow \\ y = -5 \end{cases}$$

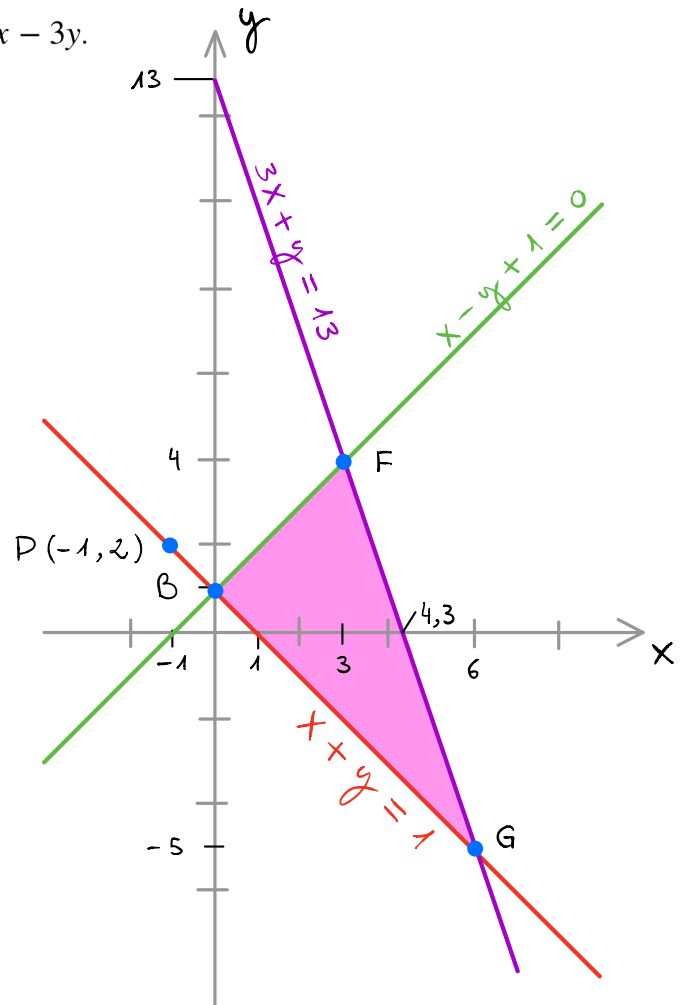
$$(6, -5) \text{ G}$$

b) Comprobamos el punto $P(-1, 2)$ en todas las restricciones.

$$x - y + 1 \geq 0$$

$$-1 - 2 + 1 = -2 \not\geq 0$$

No cumple: No pertenece a la región factible.



c) La función objetivo es: $f(x, y) = x - 3y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: B, F, G

$$\left. \begin{aligned} f(0, 1) &= -3 \\ f(3, 4) &= 3 - 3 \cdot 4 = -9 \\ f(6, -5) &= 6 - 3(-5) = 21 \end{aligned} \right\}$$

El máximo se produce en $x=6, y=-5$ (vértice G) con un valor de 21

El mínimo se produce en $x=3, y=4$ (vértice F) con un valor de -9

4. Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B. El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

Producto	Obreros	Horas	Beneficios / Ud.
A (x)	2	20	1.500 €
B (y)	3	10	1.000 €
Máximos	60	480	

Llamaremos : $x \equiv$ Unidades tipo A
 $y \equiv$ Unidades tipo B

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{1500x}_A + \underbrace{1000y}_B \quad (\text{máximo beneficio})$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Producto A} \quad 2x + 3y \leq 60 \\ \text{Producto B} \quad 20x + 10y \leq 480 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad (\text{No negatividad})$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$2x + 3y = 60$$

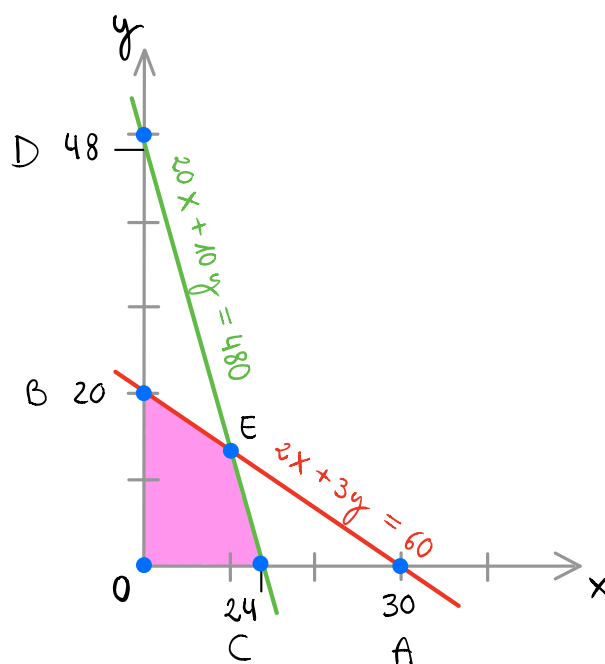
$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=30 \Rightarrow (30, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=20 \Rightarrow (0, 20) \text{ B}$$

$$20x + 10y = 480$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=24 \Rightarrow (24, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=48 \Rightarrow (0, 48) \text{ D}$$



Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular el punto E.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 60 \\ 20x + 10y = 480 \end{array} \right\} \cdot 10$$

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 30y = 600 \\ 20x + 10y = 480 \end{array} \right\} -$$

$$\left. \begin{array}{l} 20y = 120 \Rightarrow y = 6 \\ x = \frac{60 - 3y}{2} = \frac{60 - 3 \cdot 6}{2} = 21 \end{array} \right\} \Rightarrow (21, 6) \text{ E}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 1500x + 1000y$

Sustituimos los vértices de la **región factible** en la función objetivo : O, B, E, C

$$\left. \begin{array}{l} f(0, 0) = 0 \text{ €} \\ f(0, 20) = 20.000 \text{ €} \\ f(21, 6) = 37.500 \text{ €} \\ f(24, 0) = 36.000 \text{ €} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{El máximo se produce en} \\ x = 21, y = 6 \text{ (vértice E)} \end{array}$$

Produciremos 21 productos del tipo A y 6 productos del tipo B con un beneficio máximo de 37.500 €