

MATRICES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $R_g(A) = 2$
 $R_g(A+I) = 3$
- a) Calcula el rango de las matrices A y $A+I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
- b) Despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$. (2,5 pt.)
2. Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos los siguiente:
- a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
- b) Por cada 13 socios de alguno de los equipos hay 3 espectadores que no son socios.
- c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.
 ¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26000 \\ 32500 \\ 13500 \end{pmatrix}$ (2,5 pt.)
3. Sea R una región del plano determinada por el sistema de inecuaciones:
 $2x + 3y \leq 12$, $-2 \leq 2x - y \leq 4$, $y \geq 0$.
- a) Representa la región R y calcula sus vértices.
- b) Justifica si el punto $P(-1/2, 1/2)$ pertenece o no a la región R . *Sí pertenece*
- c) Calcula el punto o puntos de R donde la función $f(x,y) = -2x + 5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. $f(2, 0) = -4$ Mínimo
 $f(3/4, 7/2) = 16$ Máximo (2,5 pt.)
4. Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:
- El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere dos horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas. El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.
- Resuelve el problema y razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

(2,5 pt.)

La combinación (1,1) es posible, pero no es la más rentable
G(2 mesas, 2 sillas) Máximo

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de las matrices A y $A + I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$. (2,5 pt.)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ luego $R_g(A) < 3$

Busco un menor de orden 2, por ejemplo $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ luego, $R_g(A) = 2$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ luego } R_g(A + I) = 3$$

b) $A \cdot X + X = B$ $\left| \begin{array}{l} (A + I)^{-1} \cdot (A + I) \cdot X = (A + I)^{-1} \cdot B \\ X = (A + I)^{-1} \cdot B \end{array} \right. \quad \text{Sea } Z = A + I$ $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, $|Z| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

- a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
 - b) Por cada 13 socios de alguno de los equipos hay 3 espectadores que no son socios.
 - c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.
- ¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Consideramos x socios de A, y socios de B y z que no son socios.

Condiciones: a) $x + y + z = 72000$

b)
$$\left. \begin{array}{ccc} x+y & \text{---} & z \\ 13 & \text{---} & 3 \end{array} \right\} \frac{x+y}{13} = \frac{z}{3}$$

c) $y = x + 6500$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 72000 \\ 3x + 3y - 13z = 0 \\ x - y = -6500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Resolvemos por} \\ \text{Gauss} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 3 & 3 & -13 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -6500 \end{array} \right) \xrightarrow{\uparrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0 & 0 & -16 & -216000 \\ 0 & -2 & -1 & -78500 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1$$

$$-16z = -216000 \Rightarrow z = \frac{216000}{16} = 13500$$

$$-2y - 13500 = -78500 \Rightarrow y = \frac{-78500 + 13500}{-2} = 32500$$

$$x + 32500 + 13500 = 72000 \Rightarrow x = 26000$$

Sistema compatible determinado

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26000 \\ 32500 \\ 13500 \end{pmatrix}$$

3. Sea R una región del plano determinada por el sistema de inecuaciones:

$$2x + 3y \leq 12, \quad -2 \leq 2x - y \leq 4, \quad y \geq 0.$$

a) Representa la región R y calcula sus vértices.

b) Justifica si el punto $P(-1/2, 1/2)$ pertenece o no a la región R .

c) Calcula el punto o puntos de R donde la función $f(x, y) = -2x + 5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 12 \\ -2 \leq 2x - y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2x - y = -2 \\ 2x - y = 4 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$2x + 3y = 12$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0, 4) \text{ B}$$

$$2x - y = -2$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2) \text{ D}$$

$$2x - y = 4$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0) \text{ E}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (0, -4) \text{ F}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular los puntos G y H .

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2x - y = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \\ x = \frac{1}{2}(-2 + \frac{7}{2}) = \frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{3}{4}, \frac{7}{2}) \text{ G} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2x - y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4y = 8 \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow (3, 2) \text{ H} \end{array}$$

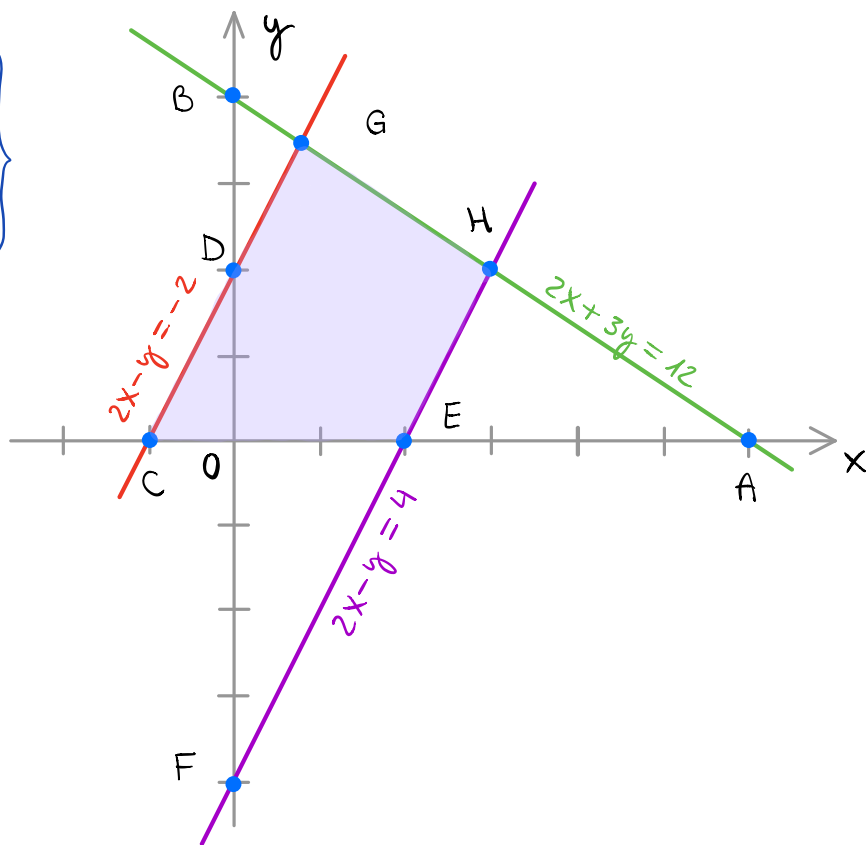
b) $P(-1/2, 1/2)$ Veamos si cumple las restricciones:

$$2(-\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2}) \leq 12 \quad \checkmark$$

$$-2 \leq 2(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \leq 4 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} \geq 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ verifica las 3 restricciones, luego pertenece a la región factible.



La función objetivo es:

$$f(x, y) = -2x + 5y$$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: C, E, G, H

$$f(-1, 0) = 2$$

$$f(2, 0) = -4 \text{ Mínimo}$$

$$f(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}) = 16 \text{ Máximo}$$

$$f(3, 2) = 4$$

4. Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere dos horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas. El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ (No negatividad)}$$

Resuelve el problema y razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

Tipo	Tiempo (h)	Coste material	Venta
Mesa (x)	2	4	20 €
Silla (y)	3	2	30 €
Máximo	10	12	

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \text{ unidades} \\ 2x + 3y \leq 10 \text{ horas} \\ 4x + 2y \leq 12 \text{ € material} \end{array} \right\} \text{Restricciones}$$

La función objetivo es: $f(x, y) = 20x + 30y$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x + y = 4$$

Si $y=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow (4,0) \text{ A}$

Si $x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4) \in$

$$2x + 3y = 10$$

Si $y=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow (5,0) \in C$

Si $x=0 \Rightarrow y=\frac{10}{3} \Rightarrow (0, \frac{10}{3}) \in D$

$$4x + 2y = 12$$

Si $y=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3,0) \in$

Si $x=0 \Rightarrow y=6 \Rightarrow (0,6) F$

El punto de intersección G
es el mismo para todas las rectas

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 10 \end{array} \right\} y = 4 - x$$

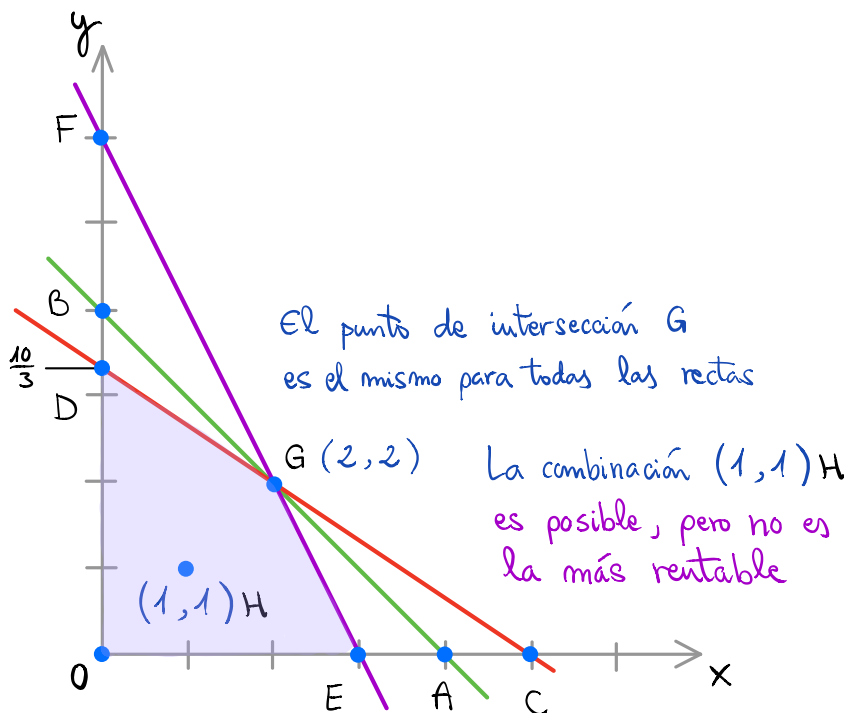
$$2x + 3(4-x) = 10 \Rightarrow x = 2, y = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 4x + 2y = 12 \end{array} \right\} y = 4 - x$$

$$4x + 2(4-x) = 12 \Rightarrow x=2, y=2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 10 \\ 4x + 2y = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ y = 6 - 2x \end{array}$$

$$2x + 3(6 - 2x) = 10 \Rightarrow x = 2, y = 2$$



La función objetivo es: $f(x, y) = 20x + 30y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la función objetivo : O, D, G, E

$$f(0, 0) = 0 \text{ € (irrelevante)}$$

$$f(0, \frac{10}{3}) = 30 \cdot \frac{10}{3} = 100 \text{ € Máximo}$$

$$f(2, 2) = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 100 \text{ € Máximo}$$

$$f(3, 0) = 20 \cdot 3 = 60 \text{ €}$$

Es solución todo el segmento $\overline{DG}$, pero sólo el punto G (2 mesas, 2 sillas) son números enteros.