

LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADAS

1. Resuelve los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{2x^2 + 1} \right)^{x+1}$ (1 pt.)

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{a \cdot x^2 + 2x} - \sqrt{a \cdot x^2 - 3} \right) = \frac{1}{2}$ (1,5 pt.)

2. Halla, si es posible, los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$. Indica si hay algún punto donde no pueda ser nunca continua:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} & \text{si } 2 < x < 5 \\ 23 \cdot b + x & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad (2,5 \text{ pt.})$$

3. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $G(x)$ millones de euros, siendo:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

a) ¿Es la ganancia $G(x)$ una función continua? (1 pt.)

b) Razona lo que ocurre con la ganancia si la inversión se incrementa indefinidamente. (0,25 pt.)

4. Sea la función $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x - 2}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas. (1,75 pt)

5. Calcula y simplifica las siguientes derivadas:

a) $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$ (1 pt.)

b) $y = x^5 \cdot 5^{x^2}$ (1 pt.)

COMPLEMENTARIO: $y = x^{\sqrt{x^2 + 1}}$ (x elevado a función) (1 pt.)

1. Resuelve los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{2x^2 + 1} \right)^{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{2x^2 + 1} \right)^{x+1} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{2x^2 + 1} - 1 \right) \cdot (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{2x^2 + 1} \cdot (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = -\frac{1}{2}$$

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{a \cdot x^2 + 2x} - \sqrt{a \cdot x^2 - 3} \right) = \frac{1}{2} = \infty - \infty \text{ IND}$, usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{ax^2 + 2x} - \sqrt{ax^2 - 3})(\sqrt{ax^2 + 2x} + \sqrt{ax^2 - 3})}{\sqrt{ax^2 + 2x} + \sqrt{ax^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 2x - ax^2 + 3}{\sqrt{ax^2 + 2x} + \sqrt{ax^2 - 3}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} + \sqrt{\frac{ax^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{a + \frac{2}{x}} + \sqrt{a - \frac{3}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{2}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 4$$

enunciado

2. Halla, si es posible, los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$. Indica si hay algún punto donde no pueda ser nunca continua:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 2 \quad (-\infty, 2] \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} & \text{si } 2 < x < 5 \quad (2, 5) \\ 23 \cdot b + x & \text{si } x \geq 5 \quad [5, \infty) \end{cases} \quad (2,5 \text{ pt.})$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos críticos.

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} < \begin{matrix} -5 \\ 2 \end{matrix}, \quad -5 \cdot 2 = \frac{-10}{1} \checkmark$$

Los puntos -5 y $2 \notin (2, 5)$ luego no representan un problema de dominio. $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

Continuidad. Estudiamos los puntos críticos $\{2, 5\}$ (fronteras de los intervalos).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} ax+1 &= 2a+1 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10} &= \frac{0}{0} \text{ INI) } = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+5)(x-2)} = \frac{1}{7} \end{aligned} \right\}$$

Factorizamos el numerador $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} < \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$, $2 \cdot 1 = \frac{2}{1}$ ✓

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$, deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2a+1 = \frac{1}{7} \Rightarrow a = \frac{\frac{1}{7} - 1}{2} = -\frac{3}{7}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-1}{x+5} &= \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} 23b+x &= 23b+5 = f(5) \end{aligned} \right\}$$

$$23b+5 = \frac{2}{5} \Rightarrow 23b = \frac{2}{5} - 5 = -\frac{23}{5} \Rightarrow b = -\frac{1}{5}$$

Si $a = -\frac{3}{7}$ y $b = -\frac{1}{5}$, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

3. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $G(x)$ millones de euros, siendo:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

- a) ¿Es la ganancia $G(x)$ una función continua? (1 pt.)
b) Razona lo que ocurre con la ganancia si la inversión se incrementa indefinidamente. (0,25 pt.)

$$\left. \begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} &= \frac{1}{2} = G(5) \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{5}{2x} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(x) \text{ es continua en } x=5$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2x} = 0 \in \Rightarrow$ Si incrementamos la inversión indefinidamente, no habrá ganancias.

4. Sea la función $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x - 2}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas.

Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

A.V. $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ Asíntota vertical , $D = \mathbb{R} - \{2\}$

Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 + 5}{x - 2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 + 5}{x - 2} = +\infty$

A.H. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty$ No hay asíntota horizontal

A.O. $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{1} = 3$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5}{x - 2} - 3 \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5 - 3x^2 + 6x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5}{x - 2} = \frac{6}{1} = 6$

$y = mx + n = 3x + 6$ Asíntota oblicua

5. Calcula y simplifica las siguientes derivadas:

a) $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$

$y' = \frac{(2x + 5) \cdot (x - 4) - (x^2 + 5x) \cdot 1}{(x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 5x - 20 - x^2 - 5x}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2}$

b) $y = x^5 \cdot 5^{x^2}$

$y' = 5x^4 \cdot 5^{x^2} + x^5 \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5 \cdot 2x = 5^{x^2} \cdot x^4 (5 + 2x^2 \cdot \ln 5)$

COMPLEMENTARIO: $y = x^{\sqrt{x^2 + 1}}$ (x elevado a función)

Tomo logaritmos neperianos y bajo el exponente.

$\ln y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln x$; derivo implícitamente

$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \ln x + \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x}$; Despejo y' ; sustituyo y por el enunciado.

$y' = y \cdot \left(\frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) \Rightarrow y' = x^{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \right)$