

LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADAS

1. Resuelve los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{3x^2 + 2x - 1}$ (0,75 pt.)

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + a \cdot x - 3} - 2x \right) = -\frac{1}{4}$ (1 pt.)

2. Halla, si es posible, los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$. Indica si hay algún punto donde no pueda ser nunca continua:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } 1 < x < 2 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

3. Según cierta teoría médica, el peligro (sin unidades) de un virus se mide en función del tiempo que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión, donde $P(t)$ es para un tiempo de t minutos:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{50t - 62,5}{0,5t + 5} & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

a) ¿Es el peligro $P(t)$ una función continua del tiempo? (1 pt.)

b) ¿Qué peligrosidad tiene el virus a largo plazo? (0,5 pt.)

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 3}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas. (1,5 pt)

5. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2}{3 - 2x}$:

a) Calcula los intervalos de monotonía. (1 pt)

b) Encuentra y clasifica los extremos relativos y calcula sus coordenadas. (0,75 pt)

6. Calcula y simplifica las siguientes derivadas:

a) $y = (\sqrt{x} - 5x)^3$ (0,75 pt.)

b) $y = x^3 \cdot 3^{x^2}$ (0,75 pt.)

1. Resuelve los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$, Dividimos por la potencia mayor.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + a \cdot x - 3} - 2x) = -\frac{1}{4} = \infty - \infty \text{ IND}$, Usamos la técnica del conjugado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + ax - 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + ax - 3} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + ax - 3} + 2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + ax - 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + ax - 3} + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax}{x} - \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{ax}{x^2} - \frac{3}{x^2}} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a - \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{a}{x} - \frac{3}{x^2}} + 2} = \frac{a}{\sqrt{4+2}} = \frac{a}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

enunciado

2. Halla, si es posible, los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$. Indica si hay algún punto donde no pueda ser nunca continua:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 1 \quad (-\infty, 1] \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } 1 < x < 2 \quad (1, 2) \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 2 \quad [2, +\infty) \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

Buscamos puntos críticos en el denominador del 2º trozo. $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} < \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

Como 1 y 3 $\notin (1, 2)$ no generan ningún problema de dominio.

Estudiamos la continuidad en los puntos críticos 1 y 2 (fronteras). 

$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax + 1 = a + 1 = f(1)$, función definida en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+4)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = -\frac{5}{2}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, deberán coincidir los límites laterales.

$$a + 1 = -\frac{5}{2} \Rightarrow a = -\frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

Factorizamos el numerador $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} < \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+4}{x-3} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + b = 4 + b = f(2)$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$,

$$4 + b = -6 \Rightarrow b = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

3. Según cierta teoría médica, el peligro (sin unidades) de un virus se mide en función del tiempo que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión, donde $P(t)$ es para un tiempo de t minutos:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \quad [0, 5] \\ \frac{50t - 62,5}{0,5t + 5} & \text{si } t > 5 \quad (5, +\infty) \end{cases}$$

- a) ¿Es el peligro $P(t)$ una función continua del tiempo? (1 pt.)
 b) ¿Qué peligrosidad tiene el virus a largo plazo? (0,5 pt.)

a) Para estudiar la continuidad, busco en primer lugar, puntos que puedan estar fuera del dominio.

Ceros del denominador: $0,5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -10 \notin [0, +\infty)$; no me causa ningún problema de dominio.

Estudiemmos el punto crítico $t=5$ (frontera).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 5^-} t^2 &= 25 = P(5) \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} \frac{50t - 62,5}{0,5t + 5} &= 25 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 5^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 5^+} P(t) = P(5) \\ P(t) &\text{ es continua en } t=5 \text{ y en todo el intervalo } [0, +\infty). \end{aligned}$$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t - 62,5}{0,5t + 5} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{50}{0,5} = 100$ (índice de peligrosidad a largo plazo)

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 3}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas.

Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

A.V. $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ Asíntota vertical, $D = \mathbb{R} - \{3\}$

Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x}{x - 3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 2x}{x - 3} = +\infty$

A.H. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x - 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty$ No hay asíntota horizontal

A.O. $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{1}{1} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x - 3} - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x - 3} = \frac{5}{1} = 5$

$y = mx + n = x + 5$ Asíntota oblicua

5. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2}{3-2x}$: Busco en primer lugar, puntos que puedan estar fuera del dominio.

$$3-2x=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ P.C. (Punto Crítico)} \quad Df(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Estudiamos la monotonía entre los extremos y los puntos críticos. $y' = 0$ Condición de extremo.

$$y' = \frac{4x(3-2x) - 2x^2(-2)}{(3-2x)^2} = \frac{12x - 8x^2 + 4x^2}{(3-2x)^2} = \frac{12x - 4x^2}{(3-2x)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$12x - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x(3-x) < \begin{matrix} x=0 \\ x=3 \end{matrix} \text{ Posibles extremos.}$$

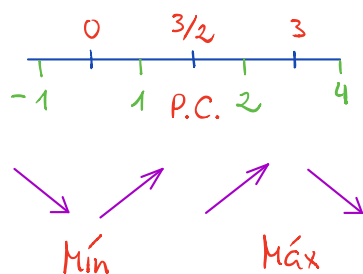
Para caracterizar los extremos evalúo la 1ª derivada en puntos escogidos al azar dentro de cada intervalo para así conocer si la función crece o decrece.

$$y'(-1) < 0 \searrow$$

$$y'(1) > 0 \nearrow$$

$$y'(2) > 0 \nearrow$$

$$y'(4) < 0 \searrow$$



Crece $(0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 3)$

Decrece $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Coordenadas de los extremos: $y(0) = 0 \Rightarrow$
 $y(3) = -6 \Rightarrow$

Mínimo local $(0, 0)$

Máximo local $(3, -6)$

6. Calcula y simplifica las siguientes derivadas:

a) $y = (\sqrt{x} - 5x)^3$

b) $y = x^3 \cdot 3^{x^2}$

a) $y' = 3 \cdot (\sqrt{x} - 5x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5\right) = (\sqrt{x} - 5x)^2 \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - 15\right)$ simplificado

b) $y' = 3x^2 \cdot 3^{x^2} + x^3 \cdot 3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x =$

$= 3x^2 \cdot (3x^2 + 2x^4 \cdot \ln 3) = x^2 \cdot 3^{x^2} \cdot (3 + 2x^2 \ln 3)$ simplificado