

LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADAS

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{3x+1} = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$ (0,75 pt.)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x) = \frac{1}{2}$ (1 pt.)

2. Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + a - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ b \cdot x^2 - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = \frac{1}{3} \\ b = -1 \end{matrix} \quad (2 \text{ pt.})$$

3. El estudio de rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $G(x)$ millones de euros, siendo:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{5} + x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{50x - 100}{2x + 5} & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad D G(x) = [0, +\infty)$$

a) ¿Es la ganancia $G(x)$ una función continua de la inversión? $G(x)$ es continua (1 pt.)

b) ¿Qué rentabilidad obtendremos si la inversión se incrementa indefinidamente? (0,5 pt.)

25 millones de €

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-5}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas. (1,5 pt)

5. Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$:

$x=5$ Asíntota vertical $\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{5\}$
 $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2}{x-5} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2}{x-5} = +\infty$, No hay asíntota horizontal
 $y = x+5$, Asíntota oblicua

a) Calcula los intervalos de monotonía. (1 pt)

b) Clasifica los extremos locales y calcula sus coordenadas. (0,75 pt)

Crece en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
 Decrece en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

6. Calcula las siguientes derivadas:

a) $y = (\sqrt{x} - 5)^3$, $y' = (\sqrt{x} - 5)^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{x}}$ (0,75 pt.)

b) $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y' = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ (0,75 pt.)

Mínimo $(-\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{4})$
 Máximo $(+\sqrt{2}, \frac{+\sqrt{2}}{4})$

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{3x+1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+3} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x+1 = \infty$, $\text{IND } 1^\infty \Rightarrow e^L = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$

$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{base} - 1) \cdot \text{exponente} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+3} - 1 \right) \cdot (3x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x+3} \cdot (3x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x-3}{x+3} = -9$ $\text{IND } \frac{\infty}{\infty}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+3x} - 3x)$ $\text{IND } \infty - \infty$, Aplicamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+3x} - 3x)(\sqrt{9x^2+3x} + 3x)}{(\sqrt{9x^2+3x} + 3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x} + 3x} \quad \text{IND } \frac{\infty}{\infty}$$

Dividimos por la potencia mayor: x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+3x} + 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + 3} = \frac{3}{\sqrt{9+3} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+a-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x^2+2x}{x^2-3x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ b \cdot x^2 - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

El 2º intervalo podría tener puntos críticos: $x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=3$

No son críticos porque se hallan fuera del intervalo $(0,2)$

Estudiamos los puntos de frontera $x=0$ y $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x+a-1 = a-1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x(x+1)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x+1)}{(x-3)} = -\frac{2}{3}$$

$\text{IND } \frac{0}{0}$ factorizamos

Será continua si:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$a-1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{8+4}{4-6} = \frac{12}{-2} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} b x^2 - 2 = 4b - 2 = f(2)$$

Será continua si:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$-6 = 4b - 2 \Rightarrow b = \frac{-6+2}{4} = -1$$

La función $f(x)$ será continua en todo $\mathbb{R}$ si $a = \frac{1}{3}$ y $b = -1$.

3. El estudio de rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $G(x)$ millones de euros, siendo:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{5} + x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{50x - 100}{2x + 5} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

- a) ¿Es la ganancia $G(x)$ una función continua de la inversión? (1 pt.)
b) ¿Qué rentabilidad obtendremos si la inversión se incrementa indefinidamente? (0,5 pt.)

a) En el primer intervalo no tiene puntos críticos. En el 2º intervalo presenta posibles puntos críticos si:

$$2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}, \text{ pero este punto está fuera del intervalo } [0, 5]. \quad D G(X) = [0, +\infty)$$

Estudiamos el punto frontera $x=5$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2}{5} + x &= 5 + 5 = 10 = G(5) \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{50x - 100}{2x + 5} &= \frac{250 - 100}{15} = 10 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 5^-} G(X) = \lim_{x \rightarrow 5^+} G(X) = G(5), \text{ luego } G(X) \text{ es continua en su dominio.}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} G(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x - 100}{2x + 5} = \frac{50}{2} = 25 \text{ millones de } \text{€}$$

IND $\frac{\infty}{\infty}$

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x - 5}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas.

Para estudiar el dominio, calculamos los ceros del denominador.

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \quad \text{Asíntota vertical} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{5\}$$

$$\text{Límites laterales: } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2}{x - 5} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2}{x - 5} = +\infty$$

$$\text{Asíntota horizontal: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x - 5} = \infty, \text{ No hay asíntota horizontal}$$

IND $\frac{\infty}{\infty}$

Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 5x} = 1, \text{ sí existe}$$

IND $\frac{\infty}{\infty}$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 5} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 5x}{x - 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x - 5} = 5$$

IND $\frac{\infty}{\infty}$

$$y = mx + n \Rightarrow y = x + 5, \text{ Asíntota oblicua}$$

5. Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$:

- Calcula los intervalos de monotonía.
- Clasifica los extremos locales y calcula sus coordenadas.

Estudiamos la monotonía entre los extremos y los puntos críticos.

Puntos críticos: calculamos los ceros del denominador. $x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$, $\nexists$ solución real. No hay. $D=\mathbb{R}$

Condición de extremo: $y' = 0$

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2+2) - x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2+2-2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$$

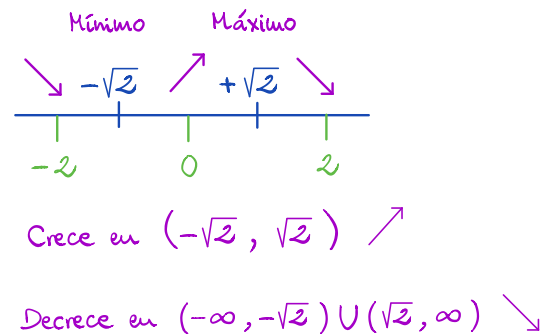
$$y' = 0 \Rightarrow 2-x^2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad (\text{posibles extremos})$$

Escogemos puntos al azar en cada intervalo:

$$y'(-2) = \frac{2-(-2)^2}{(+)} < 0 \quad \text{Decrece} \searrow$$

$$y'(-2) = \frac{2-0^2}{(+)} > 0 \quad \text{Crece} \nearrow$$

$$y'(-2) = \frac{2-(+2)^2}{(+)} < 0 \quad \text{Decrece} \searrow$$



La función $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$:

alcanza un mínimo en $x = -\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2+2} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$, Mínimo $(-\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{4})$

alcanza un máximo en $x = +\sqrt{2}$, $f(+\sqrt{2}) = \frac{+\sqrt{2}}{2+2} = \frac{+\sqrt{2}}{4}$, Máximo $(+\sqrt{2}, \frac{+\sqrt{2}}{4})$

6. Calcula las siguientes derivadas:

$$a) y = (\sqrt{x} - 5)^3 \quad y' = 3(\sqrt{x} - 5)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x} - 5)^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$b) y = \frac{\ln x}{x^2} \quad y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$