

## ANÁLISIS: LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADAS

1. Calcula los siguientes límites:

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 3}}{2x + 5} = \frac{3}{2}$  (1 pt)

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-2}{x-3} \right)^{2x} = e^2$  (0,75 p)

2. Halla los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} & \text{si } 2 < x < 4 \\ x + 19 \cdot b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$a = -\frac{3}{8}$   
 $b = -\frac{25}{114}$  (1,5 pt)

3. El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso  $P$  en toneladas;  $t$  representa la edad en años de la plancha):

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 56 - \frac{20t}{t+1} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

*Es continua en  $t = 3$*

a. ¿Es el peso una función continua de la edad? (1 p)

b. ¿Qué peso aguantará a largo plazo?  $36 \text{ T}$  (0,5 p)

4. Calcula los siguientes derivadas:

a.  $y = \sqrt{x} \cdot (5 - x^3)^5$   $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (5 - x^3)^5 + \sqrt{x} \cdot 5(5 - x^3)^4 \cdot (-3x^2)$  (1 pt)

b.  $y = \frac{x^2 - 1}{\ln x}$   $\frac{2x^2 \ln x - (x^2 - 1)}{x(\ln x)^2}$  (0,75 p)

c.  $y = 3^{(x^3 - x)}$   $3^{x^3 - x} \cdot \ln 3 \cdot (3x^2 - 1)$  (0,5 pt)

5. Sea la función:  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$   $x = \pm \sqrt{3}$  *Asíntotas verticales*  $\mathcal{D} f(x) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$   
*No hay asíntota horizontal*  $y = x$ , *Asíntota oblicua*

$\mathcal{D} f(x) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$x = \pm \sqrt{3}$

*Asíntotas verticales*  
*No hay asíntota horizontal*  
 $y = x$ , *Asíntota oblicua*

a. Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas. (1,5 pt)

b. Calcula los intervalos de monotonía y extremos (coordenadas). (1,5 pt)

*Posible punto de inflexión en  $(0,0)$*

*Hay un mínimo local en  $(3, 9/2)$*

*Hay un máximo local en  $(-3, -9/2)$*

*Crece  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$*

*Decrece  $(-3, 3) - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$*

1. Calcula los siguientes límites:

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 3}}{2x + 5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}}{\frac{2x}{x} + \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{3}{x^2}}}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{9+0}}{2+0} = \frac{3}{2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-2}{x-3} \right)^{2x} = 1^\infty \Rightarrow e^L = e^2$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} \cdot 2x = 2$$

2. Halla los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} & \text{si } 2 < x < 4 \\ x + 19 \cdot b & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad (1,5 \text{ pt})$$

$x = 2, -2$  ; están fuera del intervalo . Puntos de frontera 2 y 4

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} ax = 2a = f(2)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} &= \frac{0}{0} \text{ IND Factorizamos} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)} &= -\frac{3}{4} \end{aligned} \right\} 2a = -\frac{3}{4} \Rightarrow a = -\frac{3}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} &= -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} x + 19b &= 4 + 19b = f(4) \end{aligned} \right\} -\frac{1}{6} = 4 + 19b \Rightarrow b = -\frac{25}{114}$$

3. El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso  $P$  en toneladas;  $t$  representa la edad en años de la plancha):

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 56 - \frac{20t}{t+1} & \text{si } t > 3 \end{cases} \quad b) \lim_{t \rightarrow +\infty} 56 - \frac{20t}{t+1} = 56 - 20 = 36 \text{ T}$$

a. ¿Es el peso una función continua de la edad? (1 p)

b. ¿Qué peso aguantará a largo plazo? (0,5 p)

a)  $t = -1$  fuera del intervalo Punto de frontera  $t = 3$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3^-} 50 - t^2 &= 41 = P(3) \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} 56 - \frac{20t}{t+1} &= 56 - \frac{60}{4} = 41 \end{aligned} \right\} \text{Es continua en } t = 3$$

4. Calcula los siguientes derivadas:

a.  $y = \sqrt{x} \cdot (5 - x^3)^5$   $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (5 - x^3)^5 + \sqrt{x} \cdot 5(5 - x^3)^4 \cdot (-3x^2)$

b.  $y = \frac{x^2 - 1}{\ln x}$   $y' = \frac{2x \cdot \ln x - (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x^2 \ln x - (x^2 - 1)}{x(\ln x)^2}$

c.  $y = 3^{(x^3 - x)}$   $y' = 3^{x^3 - x} \cdot \ln 3 \cdot (3x^2 - 1)$

5. Sea la función:  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

a. Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas. (1,5 pt)

b. Calcula los intervalos de monotonía y extremos (coordenadas). (1,5 pt)

a)  $x^2 - 3 = 0$ ,  $x = \pm \sqrt{3}$  Asíntotas verticales  $\supset f(x) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$$\left. \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{x^3}{x^2 - 3} = -\infty & \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} \frac{x^3}{x^2 - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{x^3}{x^2 - 3} = +\infty & \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} \frac{x^3}{x^2 - 3} = +\infty \end{array} \right\} \text{ Límites laterales}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 3} = \infty$  No hay asíntota horizontal

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 3)} = 1$ ,

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + 3x}{x^2 - 3} = 0$

$y = mx + n \Rightarrow y = x$ , Asíntota oblicua

b)  $f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2(x^2 - 3) - x^3 \cdot 2x = 0$

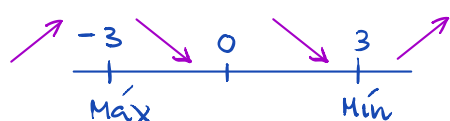
|                                |                    |                                                      |
|--------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------|
| $3x^2(x^2 - 3) = x^3 \cdot 2x$ | $x^2(x^2 - 9) = 0$ | $f(0) = 0$                                           |
| $3x^4 - 9x^2 - 2x^4 = 0$       | $x = 0$            | $f(3) = \frac{27}{9-3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ |
| $x^4 - 9x^2 = 0$               | $x = \pm 3$        | $f(-3) = -\frac{9}{2}$                               |

$f'(x) = \frac{3x^4 - 9x^2 - 2x^4}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(4x^3 - 18x) \cdot (x^2 - 3)^2 - (x^4 - 9x^2) \cdot 2(x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 - 3)^4}$

Si  $x = 0$ ,  $f''(0) = 0$  Posible punto de inflexión en  $(0, 0)$

Si  $x = 3$ ,  $f''(3) > 0$  Hay un mínimo local en  $(3, 9/2)$

Si  $x = -3$ ,  $f''(-3) < 0$  Hay un máximo local en  $(-3, -9/2)$



Crece  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Decrece  $(-3, 3) - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

↑ asíntotas

+

↶ ↷

⚙

⏪

1

📈

$y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

✕

2

📈

$x = \sqrt{3}$

✕

$x =$

1.73205080757

3

📈

$x = -\sqrt{3}$

✕

$x =$

-1.73205080757

4

📈

$y = x$

✕

5

●

$(0, 0)$

✕

☐ Show Label

6

●

$\left(3, \frac{9}{2}\right)$

✕

☐ Show Label

7

●

$\left(-3, -\frac{9}{2}\right)$

✕

☐ Show Label

8

✕

9

The figure displays a Cartesian coordinate system with the following elements:

- Functions:**
  - A rational function  $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$  plotted in red, consisting of three branches.
  - A linear function  $y = x$  plotted in green.
- Asymptotes:** Two vertical blue lines represent the asymptotes at  $x = \sqrt{3}$  and  $x = -\sqrt{3}$ .
- Key Points:**
  - The origin  $(0, 0)$  is marked with a black dot and labeled.
  - The point  $(3, 4.5)$  is marked with a red dot on the upper right branch of the rational function and labeled.
  - The point  $(-3, -4.5)$  is marked with a red dot on the lower left branch of the rational function and labeled.
- Axes:** The x-axis has labels at -5, 0, and 5. The y-axis has labels at -5 and 5.