

ANÁLISIS

1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, se sabe que la función tiene un extremo relativo en el punto $(-1,0)$ y que la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = x$.
Obtén el valor de los parámetros a, b y c . (2 pt.)
2. Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$:
 - a) Calcula la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ para la que se cumpla que $F(1) = 1$. (1 pt.)
 - b) Calcula el área encerrada entre la $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (1,5 pt.)
3. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x}$ en $x = 0$. (1,25 pt.)
4. En un hospital, el número $N(t)$ de personas afectadas por una cierta infección vírica, después de t semanas, viene dado por la función: $N(t) = \frac{350 \cdot t}{2 \cdot t^2 + k \cdot t + 8}$ siendo $t \geq 0$.
 - a) Sabiendo que el número de personas afectadas al cabo de una semana fue de 50, calcula el valor del parámetro k . (0,5 pt.)
 - b) Para el valor $k = -3$ calcula cuándo crece y decrece el número de personas afectadas y calcula en qué semana se produce el máximo y a cuántas personas asciende. (2 pt.)
 - c) Esboza la gráfica de la función $N(t)$. Calcula si tiene una asíntota horizontal. (1 pt.)
 - d) ¿A partir de qué momento, después de alcanzar el valor máximo, el número de personas afectadas es menor que 25? (0,75 pt.)

1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, se sabe que la función tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y que la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = x$.
Obtén el valor de los parámetros a, b y c . (2 pt.)

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$$

$f(x)$ pasa por el punto $(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$ que además es un extremo.

$$f'(x) = 0 \text{ Condición de extremo} \Rightarrow f'(-1) = 0$$

$$\text{En } x=0 \text{ la pendiente de la tangente es } 1 (y=1 \cdot x) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow f(-1) = (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - a + b - c = 0 \Rightarrow a - b + c = 1 \quad [1]$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(-1) = -4 + 3a - 2b + c = 0$$

$$3a - 2b + c = 4 \quad [2]$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 \quad [3] ; \text{ sustituimos en } [1] \text{ y } [2].$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a - b + 1 = 1 \\ 3a - 2b + 1 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - 2b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{array} \right\} \text{ Restamos } \Rightarrow a = 3$$
$$a - b = 0 \Rightarrow a = b$$
$$\Rightarrow b = 3$$

La función queda así:

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$$

2. Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$:

a) Calcula la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ para la que se cumpla que $F(1) = 1$.

b) Calcula el área encerrada entre la $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

$$\int (-x^2 - 2x + 3) dx = -\frac{x^3}{3} - \cancel{2} \frac{x^2}{\cancel{2}} + 3x + C = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$$

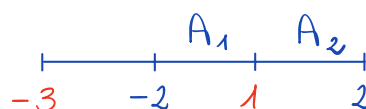
La primitiva o integral indefinida $F(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$

Si $F(1) = 1 \Rightarrow -\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 + C = 1 \Rightarrow C = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow C = -\frac{2}{3}$

b) Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración. Tengamos en cuenta los puntos dentro del intervalo $[-2, 2]$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \notin [-2, 2]$$



Hay 3 intersecciones luego tenemos que calcular 2 áreas.

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$; Nota: No se puede simplificar la expresión $f(x) - g(x) = -x^2 - 2x + 3$ para calcular el área:

$$A_1 = \int_{-2}^1 |-x^2 - 2x + 3| dx = \left| \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-2}^1 \right| \text{ Regla de Barrow}$$

$$A_1 = \left| \left(-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) \right) \right| = \left| \frac{5}{3} + \frac{22}{3} \right| = \left| \frac{27}{3} \right| = 9 u^2$$

$$A_2 = \left| \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_1^2 \right| = \left| \left(-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) \right| =$$

$$= \left| -\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \right| = \left| -\frac{7}{3} \right| = \frac{7}{3} u^2 \Rightarrow A_T = A_1 + A_2 = 9 u^2 + \frac{7}{3} u^2 = \frac{34}{3} u^2$$

3. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x}$ en $x = 0$.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ Ecuación punto-pendiente ; en $x_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{e^{2x} + x} \Rightarrow f(0) = e^0 + 0 = 1 \\ f'(x) &= \frac{2e^{2x} + 1}{2\sqrt{e^{2x} + x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{2+1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 0) \text{ recta tangente}$$

4. En un hospital, el número $N(t)$ de personas afectadas por un cierta infección vírica, después de t

semanas, viene dado por la función: $N(t) = \frac{350 \cdot t}{2 \cdot t^2 + k \cdot t + 8}$ siendo $t \geq 0$.

- Sabiendo que el número de personas afectadas al cabo de una semana fue de 50, calcula el valor del parámetro k . (0,5 pt.)
- Para el valor $k = -3$ calcula cuándo crece y decrece el número de personas afectadas y calcula en qué semana se produce el máximo y a cuántas personas asciende. (2 pt.)
- Esboza la gráfica de la función $N(t)$. Calcula si tiene una asíntota horizontal. (1 pt.)
- ¿A partir de qué momento, después de alcanzar el valor máximo, el número de personas afectadas es menor que 25? (0,75 pt.)

a) $N(t) = \frac{350t}{2t^2 + k \cdot t + 8}$; $t \geq 0$ $[0, \infty)$ nº de afectados en t semanas.

$$N(1) = 50 \Rightarrow \frac{350 \cdot 1}{2 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 8} = 50 \Rightarrow \frac{350}{k+10} = 50 \Rightarrow \frac{350}{50} = k+10 \Rightarrow 7 = k+10 \Rightarrow$$

$$k = -3$$

b) Veamos el dominio. $k = -3 \Rightarrow N(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8}$

Calculamos las raíces del denominador: $2t^2 - 3t + 8 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$$

no tiene raíces reales, luego no hay problemas de dominio.

$$\Rightarrow D N(t) = [0, \infty) = \mathbb{R}^+, t \geq 0$$

Vamos a estudiar la monotonía.

$$N'(t) = 0 \text{ Condición de extremo.}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad N'(t) = \frac{350(2t^2 - 3t + 8) - 350t(4t - 3)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = 0 \Rightarrow$$

se cancela el denominador

$$\Rightarrow 350(2t^2 - 3t + 8) - 350t(4t - 3) = 0 \Rightarrow 350(2t^2 - 3t + 8) = 350t(4t - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 3t + 8 = 4t^2 - 3t \Rightarrow 2t^2 = 8 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$$

$t = -2 \notin [0, \infty)$
 $t = 2 \in [0, \infty)$ Posible extremo

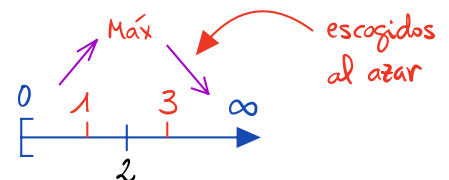
$$N'(t) = \frac{350(-2t^2 + 8)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = \frac{-700(t^2 - 4)}{(2t^2 - 3t + 8)^2}$$

Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

Evaluamos puntos al azar en cada intervalo

$$\begin{cases} N'(1) > 0 \\ N'(3) < 0 \end{cases}$$



En $t = 2$ hay un máximo relativo

Evaluamos los bordes del intervalo y los extremos. $N(0) = 0$

$$N(2) = \frac{350 \cdot 2}{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 8} = 70 \quad \text{Máximo local y absoluto}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-700(t^2 - 4)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = 0 ; \text{ Asíntota horizontal en } \boxed{N(t) = 0}$$

$\uparrow$
 $\frac{\infty}{\infty}$ IND

Intervalos de Monotonía.

Crece $(0, 2)$ semanas

El número de personas afectadas:

Decrece $(2, \infty)$ de la 2ª semana en adelante.

$N(2) = 70$ personas, luego el máximo se alcanza en la 2ª semana.

c) Gráfica de $N(t)$

Puntos:

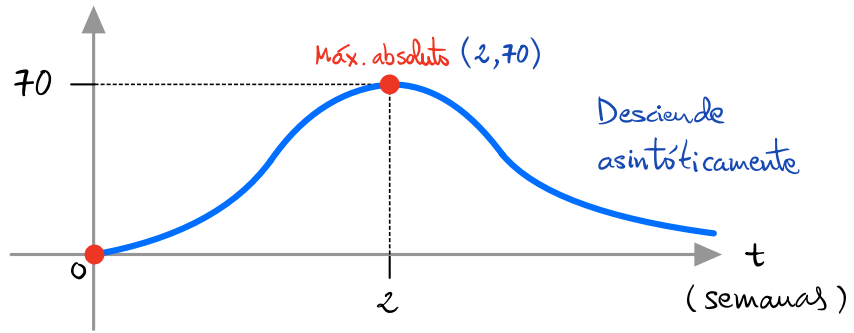
$(0, 0)$

$(2, 70)$

Asíntota horizontal en:

$$N(t) = 0$$

$N(t)$ personas afectadas



d) Después de $t = 2$; Cuándo $N(t) < 25$?

$$N(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} < 25 \Rightarrow \text{Buscamos la intersección:}$$

$$\frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} = 25 \Rightarrow 350t = 25(2t^2 - 3t + 8) \div 25$$

$$14t = 2t^2 - 3t + 8$$

$$2t^2 - 17t + 8 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} = \frac{17 \pm 15}{4} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 > 2 \\ \frac{2}{2} = 1 < 2 \end{cases}$$

El número de personas afectadas es inferior a 25 a partir de $t = 8$ semanas. $(8, \infty)$.