

ANÁLISIS

1. Calcula:

a) Calcula la derivada de: $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x} \cdot e^{x^2 - x}$ (0,75 pt.)

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5 + 3x^2}{5x + 3x^2} \right)^{ax+3} = e^3$ (1,25 pt.)

2. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos, clasificando las discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 3 \\ \ln(x - 2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 3$. (1,5 pt.)

b) Con los valores de $a = 2$ y $b = -1$, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 4$. (0,5 pt.)

4. Sea la función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

a) Calcula los intervalos de monotonía, los extremos relativos y sus coordenadas. (1,75 pt.)

b) Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas. (1,5 pt.)

c) Calcula analíticamente sus asíntotas. (0,75 pt.)



Complementario: Calcula los coeficientes a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x$ tenga un punto de inflexión en $\left(\frac{4}{3}, \frac{20}{27}\right)$. Confirma que se trata de un punto de inflexión. (1 pt.)

1. Calcula:

a) Calcula la derivada de: $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x} \cdot e^{x^2 - x}$

$$y' = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}} \cdot e^{x^2 - x} + \sqrt{x^3 - 4x} \cdot e^{x^2 - x} \cdot (2x - 1) = e^{x^2 - x} \cdot \left[\frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}} + \sqrt{x^3 - 4x} \cdot (2x - 1) \right]$$

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5 + 3x^2}{5x + 3x^2} \right)^{ax+3} = e^3$

El límite es el resultado de una indeterminación 1^∞ IND cuyo resultado es $e^L = e^3 \Rightarrow L = 3$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5 + 3x^2}{5x + 3x^2} - 1 \right) \cdot (ax + 3) \Rightarrow$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 5x}{5x + 3x^2} \cdot (ax + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5ax^2 + 5ax - 15x + 15}{5x + 3x^2} = \frac{-5a}{3} = 3 \Rightarrow a = -\frac{9}{5}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ IND

2. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos, clasificando las discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \quad (-\infty, 0) \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x \geq 0 \quad [0, \infty) \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

Estudiemos el dominio de la función. Buscamos los puntos problemáticos.

En el primer trozo e^x no tiene ningún problema.

En el 2º trozo estudiamos las raíces del denominador.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} ; \text{ Comprobación (Viète)} \quad 3 \cdot 2 = \frac{6}{1} \checkmark$$

Continuidad en los abiertos

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$ por ser una función exponencial.

$f(x)$ es continua en $[0, \infty) - \{2, 3\}$, donde el denominador no se anula.

Los puntos problemáticos son $x = 2$, $x = 3$ y $x = 0$ (la frontera entre los intervalos).

Continuidad

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) ; \text{ Puntos problemáticos } \{0, 2, 3\}$$

Estudiamos $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$$

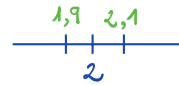
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{2} = f(0)$$

Discontinuidad de salto finito.

Estudiamos $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{0} = +\infty$$



Discontinuidad de salto infinito.

Estudiamos $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{Factorizamos el numerador y el denominador.}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 1}{2} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} ; \text{ Comprobación (Viète)} \quad 3 \cdot 1 = \frac{3}{1} \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x-1)}{(x-3) \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x-2} = \frac{3-1}{3-2} = 2$$

Es una discontinuidad evitable porque anula el denominador y se puede evitar definiendo $f(3) = 2$

El límite existe en $x=3 \Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x=3$

Se puede calcular después de simplificar.

Dominio

$$\mathcal{D} f(x) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

o bien

$$f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - \{2, 3\})$$

Continuidad

$$\mathcal{C} f(x) = \mathbb{R} - \{0, 2, 3\}$$

o bien

$$f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} - \{0, 2, 3\})$$

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 3$.

a) Para que sea derivable, es condición necesaria que sea **continua** en $x = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + b = 9a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 3, \\ \text{deberán coincidir los límites laterales.} \end{array}$$

$$9a + b = 0 \quad [1] \quad \text{Condición de continuidad}$$

La condición de **derivabilidad** es: $f'(3^-) = f'(3^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2ax = \frac{1}{x-2} \text{ en } x = 3 \Rightarrow \\ 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6} \end{array}$$

$$a = \frac{1}{6} \quad [2] \quad \text{Condición de derivabilidad}$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{6} \\ 9a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b = -9a = -9 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) \text{ es derivable en } x = 3 \text{ si } a = \frac{1}{6} \text{ y } b = -\frac{3}{2}$$

b) Calcula la recta tangente en $x_0 = 4$; como es en el 2º trozo, no influyen a ni b .

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

 Ecuación punto-pendiente

$x = 4$ pertenece al **segundo intervalo** donde $f(x) = \ln(x-2)$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x-2) \Rightarrow f(4) = \ln 2 \\ f'(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y - \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 4)} \quad \text{recta tangente}$$

4. Sea la función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

a) Calcula los intervalos de monotonía, los extremos relativos y sus coordenadas.

$y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x^2+1=0$ No tiene solución, $Df(x) = \mathbb{R}$, luego no tiene puntos críticos.

$y' = 0$ Condición de extremo.

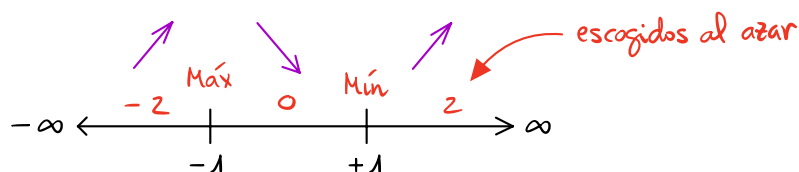
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $y' = \frac{2 \cdot (x-1)(x^2+1) - (x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(2x-2)(x^2+1) - (x^2-2x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{\cancel{2}x^3 + \cancel{2}x - 2x^2 - 2 - \cancel{2}x^3 + 4x^2 - \cancel{2}x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases}$ Posibles extremos

se cancela el denominador

Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo



$y'(-2) = \frac{+}{+} > 0$ ↗

$y'(0) = \frac{-}{+} < 0$ ↘

$y'(2) = \frac{+}{+} > 0$ ↗

Crece $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Decrece $(-1, 1)$ Intervalos de Monotonía

En $x = -1$ hay un máximo relativo

En $x = +1$ hay un mínimo relativo

Coordenadas de los extremos: $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

Si $x = -1$, $y(-1) = \frac{(-1-1)^2}{1+1} = 2$, máximo relativo $(-1, 2)$

Si $x = +1$, $y(+1) = 0$, mínimo relativo $(1, 0)$

b) Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas.

Curvatura. $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

$$y' = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{4x \cdot (x^2+1)^2 - (2x^2-2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{4x^3+4x-8x^3+8x}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3+12x}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow -4x^3+12x = 0 \Rightarrow$$

$$4x(-x^2+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \text{ Posibles P.I.}$$

Evaluamos puntos al azar en cada intervalo. Expresamos la 2ª derivada factorizada para que sea más cómodo determinar el signo.

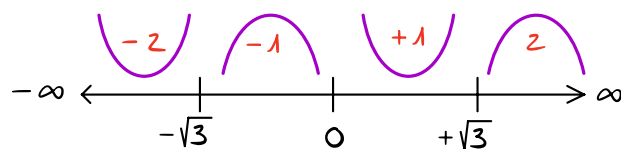
$$y'' = \frac{4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

$$y''(-2) > 0 \quad \text{convexa}$$

$$y''(-1) < 0 \quad \text{cóncava}$$

$$y''(+1) > 0 \quad \text{convexa}$$

$$y''(2) < 0 \quad \text{cóncava}$$



Efectivamente, todos son P.I. porque cambia la curvatura.

Cóncava $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Convexa $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Intervalos de curvatura

Coordenada de los puntos de inflexión. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

$$y(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3}-1)^2}{4}$$

$$y(0) = 1$$

$$y(+\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}$$

Simplificamos:

$\left(-\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right), (0, 1), \left(\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$ puntos de inflexión

4. Sea la función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ c) Calcula analíticamente sus asíntotas.

A.V. El denominador no tiene raíces luego no tiene asíntotas verticales.

A.H. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 1$ luego tiene una asíntota horizontal en $y = 1$

A.O. Asíntota oblicua $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{x^3+x} = 0, \text{ luego no tiene asíntota oblicua.}$$



Complementario: Calcula los coeficientes a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x$ tenga un punto de inflexión en $\left(\frac{4}{3}, \frac{20}{27}\right)$. Confirma que se trata de un punto de inflexión. (1 pt.)

$$f(x) \text{ pasa por el p.i.} \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{20}{27}$$

$$a \cdot \frac{4^3}{27} + b \cdot \frac{4^2}{9} - 4 = \frac{20}{27} \Rightarrow \frac{a \cdot 4^3 + b \cdot 3 \cdot 4^2 - 27 \cdot 4}{27} = \frac{20}{27} \Rightarrow \div 4$$

$$a \cdot 4^2 + b \cdot 3 \cdot 4 - 27 = 5 \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 3 \cdot 4 = 32 \Rightarrow \div 4$$

$$a \cdot 4 + b \cdot 3 = 8 \Rightarrow \boxed{4a + 3b = 8}$$

$f''(x) = 0$ Condición de punto de inflexión.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a\left(\frac{4}{3}\right) + 2b = 0$$

$$\Rightarrow 8a + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{4a + b = 0}$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} 4a + 3b = 8 \\ 4a + b = 0 \end{array} \right\} \text{ Restamos}$$

$$2b = 8 \Rightarrow \boxed{b = 4} \Rightarrow$$

$$4a = -b = -4 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$