

ANÁLISIS

1. Resuelve y demuestra los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1}$ (0,75 pt.)

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - a \cdot x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = -2$ (1,25 pt.)

2. Calcula el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - \frac{22}{3} & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad (1,5 \text{ pt.})$$

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & \text{si } x < 1 \\ 4x - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1,5 pt.)

b) Con los valores de $a = 6$ y $b = 6$, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$. (0,5 pt.)

4. Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$:

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas. (1,5 pt.)

5. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-6}$

a) Calcula los intervalos de monotonía, los extremos relativos y sus coordenadas. (1,5 pt.)

b) Calcula analíticamente su asíntota oblicua (sólo la oblicua). (1 pt.)

6. Calcula y simplifica la derivada de la función: $f(x) = 7\sqrt{x^2+1} \cdot \log(x^3-x)$ (0,5 pt.)



Complementario: Calcula los coeficientes a y b para que la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + b \cdot x$ ($x \neq 0$) tenga un extremo relativo en $(3, -1)$. ¿Qué tipo de extremo es? (1 pt.)

1. Resuelve y demuestra los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x-1 = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = \boxed{e^3}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} - 1 \right) \cdot (3x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x-1} \cdot (3x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x-2}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{6}{2} = 3$$

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - a \cdot x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = -2 = \infty - \infty \text{ IND}$, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - ax} - \sqrt{x^2 + x}) \cdot (\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - ax - x^2 - x}{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{ax}{x} - \frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{ax}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a-1}{\sqrt{1-\frac{a}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{-a-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{-a-1}{2} = -2$$

enunciado

$$-a-1 = -4 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

2. Calcula el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=3$:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - \frac{22}{3} & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos críticos.

Factorizamos el denominador del 2º trazo.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \notin (3, \infty) \text{ luego } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Luego el único punto problemático es el punto de frontera $x=3$.

Continuidad. Estudiamos el punto problemático $\{3\}$ (frontera del intervalo).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} a^x - \frac{22}{3} &= a^3 - \frac{22}{3} = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} &= \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3) \cdot (x+1)}{(x-3) \cdot (x+3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\}$$

Factorizamos el numerador $x^2 - 2x - 3 \Rightarrow$

Conocemos la raíz común $x=3$ así que podemos factorizar por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -3 & \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=3$, deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow a^3 - \frac{22}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a^3 = \frac{2}{3} + \frac{22}{3} = \frac{24}{3} = 8 \Rightarrow a = 2$$

Si $a = 2$, $f(x)$ es continua en $x=3$

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & \text{si } x < 1 \\ 4x - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$.

b) Con los valores de $a = 6$ y $b = 6$, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

a) Para que sea derivable, es condición necesaria que sea continua en $x = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + ax - 7 &= a - 8 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x - b &= 4 - b = f(1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 1, \\ &\text{deberán coincidir los límites laterales.} \end{aligned}$$

$$a - 8 = 4 - b \Rightarrow a + b = 12 \quad [1] \quad \text{Condición de continuidad}$$

La condición de derivabilidad es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + a = 4 & \text{en } x = 1 \Rightarrow \\ -2 + a = 4 \Rightarrow a = 6 \end{cases}$$

$$a = 6 \quad [2] \quad \text{Condición de derivabilidad}$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{aligned} a &= 6 \\ a + b &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 12 - a = 6 \Rightarrow b = 6$$

$f(x)$ es derivable en $x = 1$ si $a = b = 6$

b) Calcular la recta tangente en $x_0 = -1$ si $a = b = 6$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación punto-pendiente}$$

$x = -1$ pertenece al primer intervalo donde $f(x) = -x^2 + ax - 7 = -x^2 + 6x - 7$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_0) = -x^2 + 6x - 7 \Rightarrow f(-1) = -1 - 6 - 7 = -14 \\ f'(x_0) = -2x + 6 \Rightarrow f'(-1) = 2 + 6 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y + 14 = 8 \cdot (x + 1)} \quad \text{recta tangente}$$

4. Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$:

Calcular los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas.

$D = \mathbb{R}$; no hay puntos críticos.

Curvatura. $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión. $y = x^3 - 3x^2 + 1$

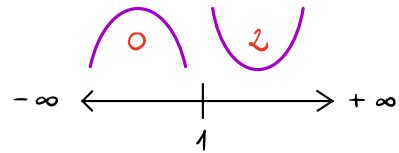
$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \quad \text{Posible P.I.}$$

Evaluar puntos al azar en cada intervalo

$$y''(0) = 6 \cdot 0 - 6 < 0 \quad \text{cóncava}$$

$$y''(2) = 6 \cdot 2 - 6 > 0 \quad \text{convexa}$$



Cóncava $(-\infty, 1)$

Convexa $(1, \infty)$

Intervalos de curvatura

Efectivamente $x = 1$ es P.I. porque cambia la curvatura.

Coordenada del punto de inflexión.

$$y = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$(1, -1)$ punto de inflexión

5. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-6}$

a) Calcula los intervalos de monotonía, los extremos relativos y sus coordenadas.

b) Calcula analíticamente su asíntota oblicua (sólo la oblicua).

$y = \frac{x^2}{2x-6}$, $2x-6=0 \Rightarrow x=3$, $Df(x) = \mathbb{R} - \{3\}$, luego $x=3$ es un punto crítico.

$y' = 0$ Condición de extremo.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $y' = \frac{2x \cdot (2x-6) - x^2 \cdot 2}{(2x-6)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2}{(2x-6)^2} = \frac{2x^2 - 12x}{(2x-6)^2}$

$y' = \frac{2x^2 - 12x}{(2x-6)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 2x(x-6) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$ Posibles extremos

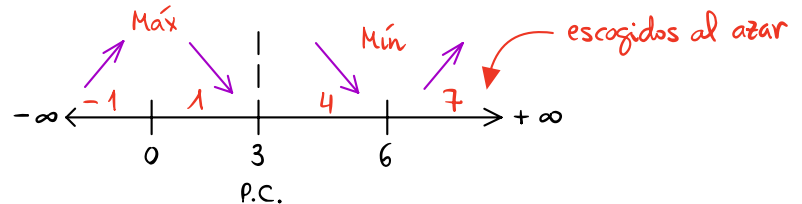
se cancela el denominador

Hay un punto crítico en $x=3$

Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo



$y'(-1) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

$y'(1) = \frac{-}{+} < 0 \searrow$

$y'(4) = \frac{-}{+} < 0 \searrow$

$y'(7) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

Crece $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$

Decrece $(0, 3) \cup (3, 6)$

Intervalos de Monotonía

En $x=0$ hay un máximo relativo

En $x=6$ hay un mínimo relativo

En $x=3$ hay un punto crítico

Coordenadas de los extremos: $\frac{x^2}{2x-6}$

Si $x=0$, $y(0) = \frac{0^2}{2 \cdot 0 - 6} = 0$,

Si $x=6$, $y(6) = \frac{6^2}{2 \cdot 6 - 6} = 6$,

máximo relativo $(0, 0)$

mínimo relativo $(6, 6)$

b) Asíntota oblicua $y = \frac{x^2}{2x-6}$

A.O. $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2-6x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{1}{2}$, $m \neq 0$ y $m \neq \infty \Rightarrow$ tiene asíntota oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x-6} - \frac{1}{2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2}x^2 - \cancel{2}x^2 + 6x}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{4x-12} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$\uparrow$
 $\frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$

$y = mx + n = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ Asíntota oblicua

6. Calcula y simplifica la derivada de la función: $f(x) = 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \log(x^3-x)$

$$f'(x) = 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 7 \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot \log(x^3-x) + 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{3x^2-1}{(x^3-x) \cdot \ln 10}$$

$$f'(x) = 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left[\frac{x \cdot \ln 7}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \log(x^3-x) + \frac{3x^2-1}{(x^3-x) \cdot \ln 10} \right]$$



Complementario: Calcula los coeficientes a y b para que la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + b \cdot x$ ($x \neq 0$)

tenga un extremo relativo en $(3, -1)$. ¿Qué tipo de extremo es?

(1 pt.)

La función pasa por el punto $(3, -1) \Rightarrow f(3) = 1 + \frac{a}{3} + 3b = -1$ (·3)

$$3 + a + 9b = -3 \Rightarrow a + 9b = -6$$
 [1]

La condición de extremo es que $f'(3) = 0$; $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + bx = 1 + ax^{-1} + bx$

$f'(x) = -ax^{-2} + b$, luego: $f'(3) = 0 \Rightarrow -a \cdot 3^{-2} + b = 0 \Rightarrow$

$$\frac{-a}{9} + b = 0 \Rightarrow -a + 9b = 0 \Rightarrow a = 9b$$
 [2]

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2]

$$a + 9b = -6 \Rightarrow 9b + 9b = -6 \Rightarrow 18b = -6 \Rightarrow b = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$$

Luego $a = 9b = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -3$

$a = -3$, $b = -\frac{1}{3}$

Caracterizamos el extremo con la 2ª derivada: $f''(x) = 2ax^{-3} = -6 \cdot x^{-3}$

siendo $f''(3) = -6 \cdot 3^{-3} < 0 \Rightarrow x = 3$ es un máximo relativo.