

ANÁLISIS

1. Resuelve los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} \right)^{2x+1}$ (1 pt.)

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{a \cdot x^2 + 3x} - \sqrt{a \cdot x^2 - 5} \right) = \frac{1}{6}$ (1,5 pt.)

2. Calcula el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = -4$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4} & \text{si } x > -4 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot a \cdot x + b & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 + a \cdot x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$. (1,5 pt.)

b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 3$. (0,5 pt.)

4. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas. (1,5 pt)

5. Sea la función $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + x$

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas. (2 pt)

1. Resuelve los siguientes límites:

a) Demuestra y calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} \right)^{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \infty \text{ IND}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} \right)^{2x+1} = 1^\infty \text{ IND} = e^L = \boxed{e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} - 1 \right) \cdot (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{3x^2 + 1} \cdot (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 3x - 1}{3x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = -\frac{2}{3}$$

b) Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{a \cdot x^2 + 3x} - \sqrt{a \cdot x^2 - 5} \right) = \frac{1}{6} = \infty - \infty \text{ IND}$, usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{ax^2 + 3x} - \sqrt{ax^2 - 5})(\sqrt{ax^2 + 3x} + \sqrt{ax^2 - 5})}{\sqrt{ax^2 + 3x} + \sqrt{ax^2 - 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 3x - ax^2 + 5}{\sqrt{ax^2 + 3x} + \sqrt{ax^2 - 5}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{ax^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{\sqrt{a + \frac{3}{x}} + \sqrt{a - \frac{5}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{3}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{6}$$

$\frac{3}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{6} \Rightarrow 9 = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a = 81}$

enunciado

2. Calcula el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = -4$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4} & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos críticos.

Factorizamos el denominador del 2º trazo.

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{matrix} -4 \\ -1 \end{matrix}, -4 \cdot (-1) = \frac{4}{1} \checkmark$$

Los puntos $-4 \notin (-4, \infty)$ luego $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Continuidad. Estudiamos el punto crítico $\{-4\}$ (frontera del intervalo).

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} ax + 2 = -4a + 2 = f(-4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4} = \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{(x-4)(x+4)}{(x+1)(x+4)} = \frac{8}{3}$$

Factorizamos el numerador $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -4$, deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = f(-4) \Rightarrow -4a + 2 = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{\frac{8}{3} - 2}{-4} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Si $a = -\frac{1}{6}$, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R} - \{-1\}$

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot a \cdot x + b & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 + a \cdot x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 3$.

a) Para que sea derivable, es condición necesaria que sea continua en $x = 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} 2ax + b &= 4a + b = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 + ax + 2 &= 10 + 2a \end{aligned} \right\} \text{ Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 2, \text{ deberán coincidir los límites laterales.}$$

$$4a + b = 10 + 2a \Rightarrow 2a + b = 10 \quad [1] \text{ Condición de continuidad}$$

La condición de derivabilidad es: $f'(2^-) = f'(2^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 3x^2 + a \text{ en } x = 2 \\ 2a = 12 + a \Rightarrow a = 12 \end{cases}$$

$a = 12$ [2] Condición de derivabilidad

$$\text{Resolvemos el sistema: } \begin{cases} a = 12 \\ 2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 10 - 2a = 10 - 2 \cdot 12 \\ b = -14 \end{cases}$$

$f(x)$ es derivable en $x = 2$ si $a = 12$ y $b = -14$

b) Calcula la recta tangente en $x_0=3$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación punto-pendiente}$$

$x = 3$ pertenece al segundo intervalo donde $f(x) = x^3 + ax + 2 = x^3 + 12x + 2$

$$f(x_0) = x^3 + 12x + 2 \Rightarrow f(3) = 27 + 36 + 2 = 65$$

$$f'(x_0) = 3x^2 + 12 \Rightarrow f'(3) = 27 + 12 = 39$$

$$y - 65 = 39 \cdot (x - 3) \quad \text{recta tangente}$$

4. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$: Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas.

Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

$$\text{A.V. } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{Asíntota vertical, } D = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{Límites laterales: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{A.H. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty \quad \text{No hay asíntota horizontal}$$

$$\text{A.O. } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{2}{1} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} - 2 \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2}x^2 - 1 - \cancel{2}x^2 + 4x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1}{x - 2} = \frac{4}{1} = 4$$

$\frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$

$$y = mx + n = 2x + 4 \quad \text{Asíntota oblicua}$$

5. Sea la función $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + x$ $D = \mathbb{R}$; no hay puntos críticos.

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas.

Curvatura. $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión. $y = 2x^4 - 2x^2 + x$

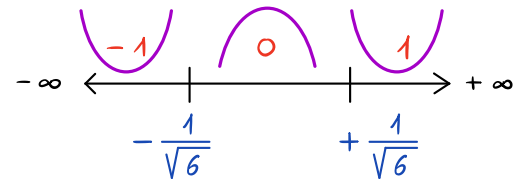
$$y' = 8x^3 - 4x + 1$$

$$y'' = 24x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{Posibles P.I.} \quad \text{Evaluamos puntos al azar en cada intervalo}$$

$$y''(-1) = 24 \cdot (-1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$

$$y''(0) = 24 \cdot (0)^2 - 4 < 0 \quad \text{cóncava}$$

$$y''(+1) = 24 \cdot (+1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$



$$\text{Convexa } \left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty\right)$$

$$\text{Cóncava } \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Intervalos de curvatura

Efectivamente $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ son P.I.

porque cambia la curvatura.

Coordenadas de los puntos de inflexión.

$$y = 2x^4 - 2x^2 + x \Rightarrow y\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^4 - 2\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{-1}{\sqrt{6}} = -\frac{5+3\sqrt{6}}{18} \simeq -0,69$$

$$y\left(+\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-5+3\sqrt{6}}{18} \simeq 0,13$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{5+3\sqrt{6}}{18}\right); \left(+\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-5+3\sqrt{6}}{18}\right) \quad \text{puntos de inflexión}$$