

CONTROL GLOBAL

El examen consta de **6 preguntas, todas con la misma puntuación (3,33)**, de las que puedes responder un **MÁXIMO de 3, obligatoriamente UNA DE CADA BLOQUE. Importante:** Si haces 2 ejercicios del mismo bloque (**Álgebra, Análisis o Probabilidad**), sólo se corregirá el primero que hayas realizado. Si dejas un bloque en blanco, la puntuación máxima de la prueba será **6,66**.

BLOQUE DE ÁLGEBRA. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ÁLGEBRA 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2x \\ 4 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

- a) Calcula la inversa de la matriz A .
- b) Calcula la matriz $C \cdot D - B$. ¿De qué orden es esta matriz?
- c) Determina los valores de x, y, z que satisfagan la identidad $A^{-1} \cdot B = C \cdot D - B$.

ÁLGEBRA 2: El palacio de la Ópera de A Coruña vende un máximo de 1500 abonos anuales para conciertos. Son de dos tipos: A y B . El número de abonos del tipo B no puede superar los 600. El número de abonos del tipo A no puede superar al doble de abonos del tipo B . Un abono del tipo A cuesta 800 € y un abono del tipo B cuesta un 40 % menos que el de tipo A .

- a) Escribe las restricciones. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
- b) ¿Cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de los abonos?

BLOQUE DE ANÁLISIS. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ANÁLISIS 1:

- a) La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$. Calcula los valores de los parámetros a , b y c .
- b) Sea la función $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x$. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía así como los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura.
- c) Halla el área de la región comprendida entre el eje de abscisas OX , la función $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x$ y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

ANÁLISIS 2: El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0,04 \cdot t^2 + 2,4 \cdot t & \text{si } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40 \cdot t - 320}{t} & \text{si } 40 \leq t \leq 50 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo en años}$$

- a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.
- b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?
- c) Calcula cuándo los beneficios son inferiores a 20.000 €.
- d) Esboza la gráfica de la función $B(t)$.

BLOQUE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 1:

- a) Los escolares de un colegio de Santiago fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de $2/5$ hacían ejercicio regularmente y $2/3$ siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de $9/25$ hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar a un escolar de ese colegio:
1. Calcula la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.
 2. ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

- b) La prestación social que reciben los parados sigue una distribución normal con una desviación típica de 90 €. A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 € y 442,28 € (ambos incluidos). Determina:
1. La media muestral obtenida y el nivel de confianza utilizado.
 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de una muestra de 25 parados sea mayor o igual que 430 € sabiendo que $\mu = 425$ € ?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2:

- a) Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas y de ellas, el 15 % tiene errores. El segundo capítulo consta de 80 páginas de las cuales 8 tienen errores; en el tercer capítulo de 50 páginas hay 40 que no tienen ningún error. Si abrimos el libro por una página al azar:
1. Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
 2. Si la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

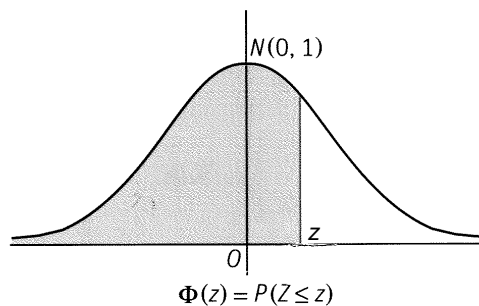
Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

- b) Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje o proporción de una población que ha sido vacunada frente a una cierta enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1000 personas y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:
1. Calcula un intervalo de confianza para la proporción de personas que han sido vacunadas con un nivel de confianza del 95 % .
 2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 1 % , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < +\infty$$

[illegible]

ÁLGEBRA 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2x \\ 4 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz A .

b) Calcula la matriz $C \cdot D - B$. ¿De qué orden es esta matriz?

c) Determina los valores de x, y, z que satisfagan la identidad $A^{-1} \cdot B = C \cdot D - B$.

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ luego tiene inversa}$$

Para calcular la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 3y \\ y+2z \end{pmatrix} \quad 3 \times 1$$

$$C \cdot D - B = \begin{pmatrix} y+z \\ 3y \\ y+2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2x \\ 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ 3y-4 \\ 2z \end{pmatrix}$$

c) Calcular x, y, z tal que $A^{-1} \cdot B = C \cdot D - B$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -y \\ -2x+2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -y \\ -2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ 3y-4 \\ 2z \end{pmatrix} ; \text{ Lo resolvemos por igualaci3n celda a celda.}$$

$$\begin{cases} 4 = 2x + y + z \\ -y = 3y - 4 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1 \\ -2x + 2y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2x + 1 + z \\ -2x + 2 \cdot 1 = 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ 2x + 2z = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{restando} \\ \Rightarrow z = -1 \\ \Rightarrow x = \frac{3-z}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow x = 2 \end{array} \right.$$

$$B = \begin{pmatrix} -2x \\ 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

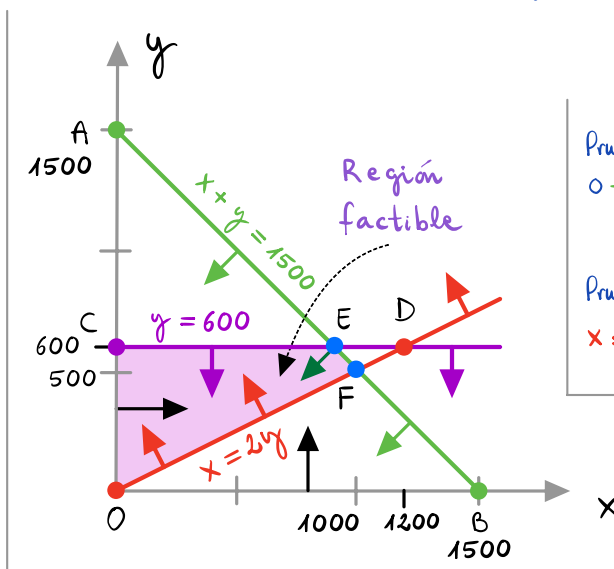
ÁLGEBRA 2: El palacio de la Ópera de A Coruña vende un máximo de 1500 abonos anuales para conciertos. Son de dos tipos: A y B. El número de abonos del tipo B no puede superar los 600. El número de abonos del tipo A no puede superar al doble de abonos del tipo B. Un abono del tipo A cuesta 800 € y un abono del tipo B cuesta un 40 % menos que el de tipo A.

- Escribe las restricciones. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
- ¿Cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de los abonos?

$$\text{Restricciones: } \left. \begin{array}{l} x + y \leq 1500 \\ y \leq 600 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(No negatividad)} \end{array}$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**. Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1500 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=1500 \text{ (0,1500) A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=1500 \text{ (1500,0) B} \\ y=600 \Rightarrow (0,600) \text{ C} \\ x=2y ; \text{ Si } x=0 \Rightarrow y=0 \text{ (0,0) O} \\ \text{Si } y=600 \Rightarrow x=1200 \text{ (1200,600) D} \end{array} \right.$$



Pruebo el punto (0,0)
 $0+0 \leq 1500$ cumple
 $0 \leq 600$ cumple
 Pruebo el punto (0,1)
 $x \leq 2y \Rightarrow 0 \leq 2$ cumple

Vértices: O, C, E, F

Por último, busco la intersección entre las restricciones: O, C, E, F

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1500 \\ y = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1500 - 600 = 900 \\ \text{Luego } (900, 600) \text{ E} \end{array} ; \left. \begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y + y = 3y = 1500 \\ y = 500 \Rightarrow x = 1000 \\ \text{Luego } (1000, 500) \text{ F} \end{array}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 800x + 480y$ (cantidad máxima)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: O, C, E, F

$$\left. \begin{array}{l} O, f(0,0) = 0 \text{ € trivial} \\ C, f(0,600) = 288.000 \text{ €} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} E, f(900,600) = 1.008.000 \text{ €} \\ F, f(1000,500) = 1.040.000 \text{ €} \end{array} \right\}$$

Lograremos una recaudación máxima de 1.040.000 € vendiendo 1000 abonos tipo A y 500 tipo B.

ANÁLISIS 1:

a) La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$. Calcula los valores de los parámetros a , b y c .

b) Sea la función $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x$. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía así como los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura.

c) Halla el área de la región comprendida entre el eje de abscisas OX , la función

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x \text{ y las rectas } x = 3 \text{ y } x = 4.$$

$$a) \quad g(x) = ax^3 + bx + c$$

La función pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,-1)$ y cumple la condición de extremo $f'(1)=0$.

$$g(x) = ax^3 + bx + c$$

$$g(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$g(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + c = -1 \Rightarrow a + b + \underbrace{c}_0 = -1 \Rightarrow a + b = -1 \quad [1]$$

$$g'(x) = 3ax^2 + b$$

$$g'(1) = 3a \cdot 1^2 + b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad [2]$$

$$\text{Resolvemos el sistema formado por [1] y [2]} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = -1 - a = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{La forma final de la función es } g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$\text{Tipo de extremo: } g'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$g''(x) = 3x \Rightarrow g''(1) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo local en } x=1$$

b) Sea la función $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x$. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía así como los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura.

$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $Df(x) = \mathbb{R}$ porque es una función polinómica y no tiene puntos críticos.

$y' = 0$ Condición de extremo. $y' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ Posibles extremos

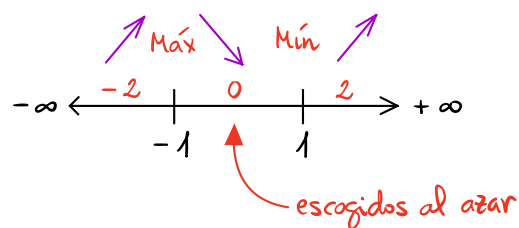
Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot (x-1) \cdot (x+1)$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

$y'(-2) = + \cdot + > 0$
 $y'(0) = - \cdot + < 0$
 $y'(2) = + \cdot + > 0$

Crece $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
 Decrece $(-1, 1)$



Intervalos de Monotonía

En $x = -1$ hay un máximo relativo

En $x = 1$ hay un mínimo relativo

Coordenadas de los extremos: $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$,

Si $x = -1$, $y(-1) = 1$
 Si $x = 1$, $y(1) = -1$

máximo relativo $(-1, 1)$
 mínimo relativo $(1, -1)$

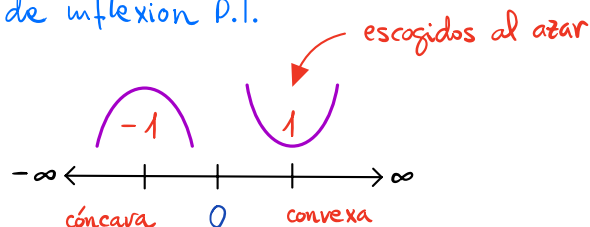
Extremos locales

Curvatura $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

$y' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow y'' = 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ Posible punto de inflexión P.I.

La curvatura se estudia en los intervalos entre los P.I. y los puntos críticos

Evaluamos puntos al azar en cada intervalo



$y''(-1) < 0$ $y''(1) > 0$

En $x = 0$ cambia la curvatura, luego es un P.I. confirmado.

Cóncava en $(-\infty, 0)$

Convexa en $(0, \infty)$

Coordenadas: $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$; $y(0) = 0$

Punto de inflexión $(0, 0)$

c) Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida. Conocemos los límites de integración $x=3$ y $x=4$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \notin (3,4) \\ x=\pm\sqrt{3} \notin (3,4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

sólo hay 2 intersecciones $x=3$ y $x=4$, luego tenemos que calcular 1 área.

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$;

$$A = \int_3^4 \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right| dx = \left| \left[\frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{3x^2}{2 \cdot 2} \right] \right|_3^4 = \left| \left[\frac{x^4}{8} - \frac{3x^2}{4} \right] \right|_3^4 ; \text{ Regla de Barrow}$$

$$A = \left| \left(\frac{4^4}{8} - \frac{3 \cdot 4^2}{4} \right) - \left(\frac{3^4}{8} - \frac{3 \cdot 3^2}{4} \right) \right| = \left| 20 - \frac{27}{8} \right| = \frac{133}{8} u^2$$

ANÁLISIS 2: El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0,04 \cdot t^2 + 2,4 \cdot t & \text{si } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40 \cdot t - 320}{t} & \text{si } 40 \leq t \leq 50 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo en años}$$

- Estudia la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.
- Estudia el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?
- Calcula cuándo los beneficios son inferiores a 20.000 €.
- Esboza la gráfica de la función $B(t)$.

a) Estudiemos el **dominio**. En el trozo 1: la función es polinómica y no hay problemas de dominio.

En el trozo 2: $t=0 \notin [40, 50] \Rightarrow$ no es un problema $\text{Dom } B(t) = [0, 50]$

La función sólo podría tener problemas de continuidad en el punto de frontera que separa los intervalos.

Para que sea **continua** en $t=40$ debe verificarse $\lim_{t \rightarrow 40^-} B(t) = \lim_{t \rightarrow 40^+} B(t) = B(40)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 40^-} -0,04 \cdot t^2 + 2,4 \cdot t &= 32 \\ \lim_{t \rightarrow 40^+} \frac{40 \cdot t - 320}{t} &= 32 = B(40) \end{aligned} \right\} B(t) \text{ es continua en } t=40$$

$$\boxed{B(t) \in C[0, 50]}$$

La condición de **derivabilidad** es: $B'(40^-) = B'(40^+)$

$$B'(t) = \begin{cases} -2 \cdot 0,04 \cdot t + 2,4 = -0,08 \cdot t + 2,4 & \text{si } 0 < t < 40 \\ \frac{40 \cdot t - (40 \cdot t - 320)}{t^2} = \frac{320}{t^2} & \text{si } 40 < t \leq 50 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} B'(40^-) &= -0,8 \\ B'(40^+) &= 0,4 \end{aligned} \right\} B'(40^-) \neq B'(40^+) \Rightarrow \boxed{B(t) \text{ no es derivable en } t=40}$$

$$\boxed{B(t) \in \mathcal{D}[0, 50] - \{40\}}$$

b) Monotonía

Monotonía: Trozo 1 $B(t) = -0,04 \cdot t^2 + 2,4 \cdot t$ $[0, 40)$; $y' = 0$ Condición de extremo.

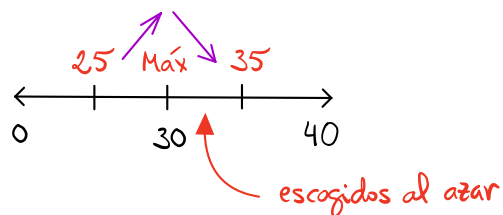
$B'(t) = -0,08 \cdot t + 2,4 = 0$, condición de extremo $\Rightarrow t = \frac{2,4}{0,08} = 30 \Rightarrow$ posible extremo

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

Método de la 1ª derivada

$B'(25) > 0$ ↗

$B'(35) < 0$ ↘



Método de la 2ª derivada

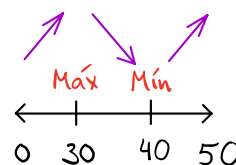
$B''(t) = -0,08 < 0 \Rightarrow t = 30$ es un máximo local en este intervalo $[0, 40)$.

Monotonía: Trozo 2 $B(t) = \frac{40 \cdot t - 320}{t}$ $[40, 50]$; $y' = 0$ Condición de extremo.

$B'(t) = \frac{320}{t^2} \neq 0$, condición de extremo $\Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay extremos.

$B'(t) > 0 \Rightarrow$ la función $B(t)$ crece todo el tiempo en $[40, 50]$.

$t = 40$ es un mínimo local en este intervalo $[40, 50]$.



Crece $[0, 30) \cup (40, 50]$ años
Decrece $(30, 40)$ años

Intervalos de Monotonía

$B(0) = 0$, $B(40) = 32$

$B(30) = 36$, $B(50) = 33,6$

El beneficio máximo es de 36.000 € y se produce a los 30 años.

c) Beneficios inferiores a 20.000 €

Debemos comprobarlo en ambos intervalos.

$-0,04 \cdot t^2 + 2,4 \cdot t < 20$

$-0,04 \cdot t^2 + 2,4 \cdot t - 20 = 0$

$0,04 \cdot t^2 - 2,4 \cdot t + 20 = 0$ $\begin{cases} 50 \notin [0, 40) \\ 10 \in [0, 40) \end{cases}$

Sabemos que crece desde 0 a 30 años y desde 0 €.

$\frac{40 \cdot t - 320}{t} < 20$; $\frac{40 \cdot t - 320}{t} = 20$

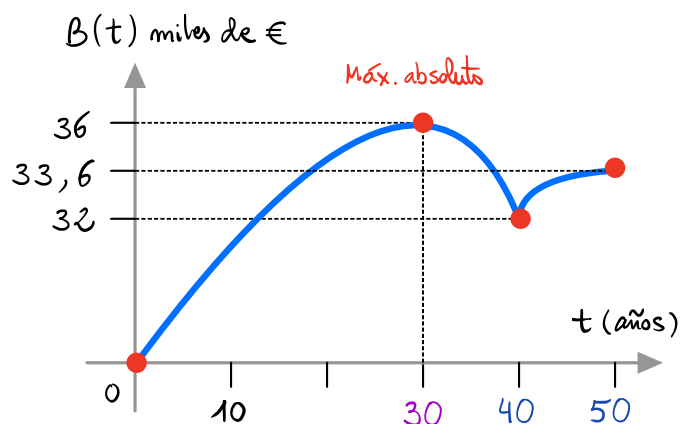
$20 \cdot t - 320 = 0 \Rightarrow t = 16 \notin [40, 50]$

Los beneficios son inferiores a 20.000 € durante los primeros 10 años.

d) Esbozo de la gráfica de $B(t)$. Puntos:

$B(0) = 0$ | $B(30) = 36$

$B(40) = 32$ | $B(50) = 33,6$



ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 1:

- a) Los escolares de un colegio de Santiago fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de $\frac{2}{5}$ hacían ejercicio regularmente y $\frac{2}{3}$ siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de $\frac{9}{25}$ hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar a un escolar de ese colegio:

1. Calcula la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.
2. ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

$$E \equiv \text{Hace ejercicio}; D \equiv \text{Desayuna} \quad P(E) = \frac{2}{5} = 0,4; \quad P(D) = \frac{2}{3}; \quad P(E|D) = \frac{9}{25}$$

$$a1) \text{ Por las leyes de Morgan } P(\overline{D} \cap \overline{E}) = P(\overline{D \cup E}) = 1 - P(D \cup E) = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} \Rightarrow P(E \cap D) = P(D) \cdot P(E|D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{6}{25}$$

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{6}{25} = \frac{62}{75}$$

$$P(\overline{D \cup E}) = 1 - P(D \cup E) = 1 - \frac{62}{75} = \frac{13}{75}$$

a2) ¿Son D y E independientes?

$$D \text{ y } E \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E) \quad P(E \cap D) = \frac{6}{25}$$

$$P(D) \cdot P(E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \neq \frac{6}{25} \text{ luego no son independientes. Son dependientes.}$$

$$\text{Método II: } P(E|D) = \frac{9}{25} \neq P(E) = \frac{2}{5}$$

b) La prestación social que reciben los parados sigue una distribución normal con una desviación típica de 90 €. A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 € y 442,28 € (ambos incluidos). Determina:

1. La media muestral obtenida y el nivel de confianza utilizado.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de una muestra de 25 parados sea mayor o igual que 430 € sabiendo que $\mu = 425$ €?

b1) $n = 225$, $\sigma = 90$ € : I.C. $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Tenemos una probabilidad de que la media de prestación (de toda la población) se halle dentro del intervalo: $\mu \in (\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (407,72 ; 442,28)$

$407,72 \leq \mu \leq 442,28 \Rightarrow \text{LONGITUD o AMPLITUD} = 74,94 - 69,06 = 5,88 = 2 \cdot E$ (no piden este dato)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\text{Extremo izquierdo} + \text{Extremo derecho}}{2} = \frac{407,72 + 442,28}{2} = 425 \text{ €} \\ E &= \frac{\text{Extremo derecho} - \text{Extremo izquierdo}}{2} = \frac{442,28 - 407,72}{2} = 17,28 \text{ €} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\text{Extremo izquierdo} + \text{Extremo derecho}}{2} = \frac{407,72 + 442,28}{2} = 425 \text{ €} \\ E &= \frac{\text{Extremo derecho} - \text{Extremo izquierdo}}{2} = \frac{442,28 - 407,72}{2} = 17,28 \text{ €} \end{aligned}} \right\} \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 17,28 \cdot \frac{\sqrt{225}}{90} = \frac{72}{25} = 2,88$ (Valor crítico)

$Z_{\alpha/2} = 2,88$ Busco la probabilidad de 2,88 en la tabla $\Rightarrow 0,9980$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9980 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9980 = 0,002 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,002 = 0,004$ (Nivel de significación)

$\Rightarrow 1 - \alpha = 0,996 \Rightarrow 99,6\%$ (Nivel de confianza)

La media muestral $\bar{x} = 425 \text{ €}$

b2) $\mu = 425 \text{ €}$; $n = 25$; $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(425, \frac{90}{\sqrt{25}}\right) = N(425, 18)$
 $\sigma = 90 \text{ €}$ (no cambia)

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$
 Tipificación en una distribución muestral por la media

$P(\bar{x} \geq 430) = P\left(Z < \frac{430 - 425}{\frac{90}{\sqrt{25}}}\right) = P(Z < 0,28) = 1 - 0,6103 = 0,3897$
 Tipificamos $\nearrow$ Redondeo a 2 decimales $\underbrace{0,28}$ Tabla 0,6103

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2:

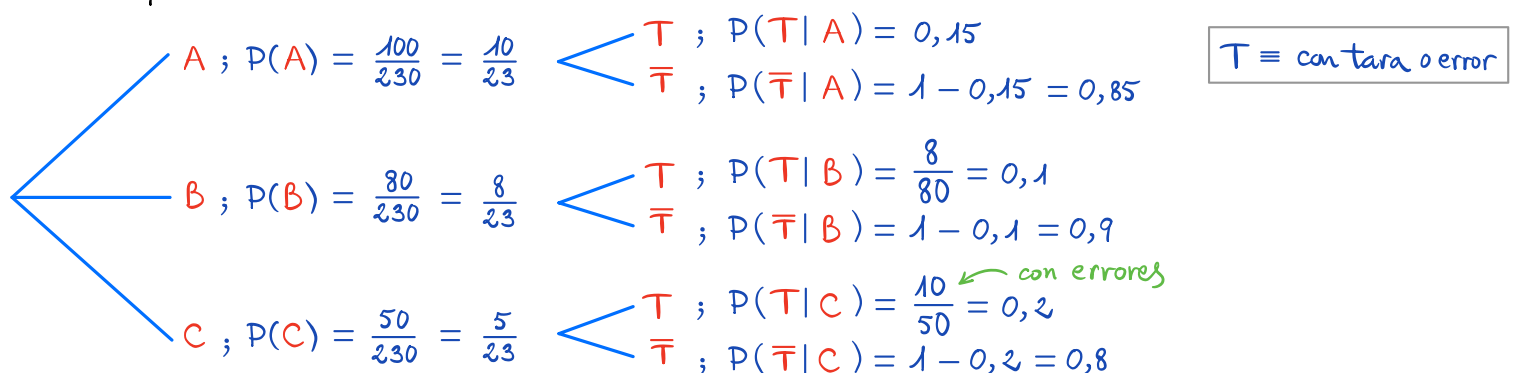
a) Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas y de ellas, el 15 % tiene errores. El segundo capítulo consta de 80 páginas de las cuales 8 tienen errores; en el tercer capítulo de 50 páginas hay 40 que no tienen ningún error. Si abrimos el libro por una página al azar:

1. Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
2. Si la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

n° total de páginas : 230 $A \equiv$ primer capítulo ; $B \equiv$ segundo capítulo ; $C \equiv$ tercer capítulo

Árbol completo :



a) Probabilidad de que una página no tenga errores . Probabilidad total :

$$P(\bar{T}) = P(A \cap \bar{T}) + P(B \cap \bar{T}) + P(C \cap \bar{T})$$

$$P(\bar{T}) = P(A) \cdot P(\bar{T}|A) + P(B) \cdot P(\bar{T}|B) + P(C) \cdot P(\bar{T}|C)$$

$$P(\bar{T}) = \frac{10}{23} \cdot 0,85 + \frac{8}{23} \cdot 0,9 + \frac{5}{23} \cdot 0,8 = \frac{197}{230} \simeq 0,8565$$

b) Teorema de Bayes: $P(C|T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{P(C) \cdot P(T|C)}{1 - P(\bar{T})} = \frac{\frac{5}{23} \cdot 0,2}{1 - 0,8565} = \frac{10}{33} = 0,3030$

b) Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje o proporción de una población que ha sido vacunada frente a una cierta enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1000 personas y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

1. Calcula un intervalo de confianza para la proporción de personas que han sido vacunadas con un nivel de confianza del 95 % .
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 1 % , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

b1) El estimador de la proporción es $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{860}{1000} = 0,86$; $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,86 = 0,14$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2} \quad \text{Es la probabilidad que busco en la tabla.}$$

Nivel de confianza $p = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$$

↑
Tabla

valor exacto

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para p y $\hat{p}$ conocida es :

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

siendo el error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,86 \cdot 0,14}{1000}} \approx 0,0215$ (4 decimales)

Tenemos una probabilidad del 95% de que la proporción de menores (de toda la población) se halle dentro del intervalo : $p \in (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$

$$p \in (0,86 - 0,0215, 0,86 + 0,0215) \quad 0,8385 \leq p \leq 0,8815 \quad , \text{ es decir entre el } 83,85 \% \text{ y el } 88,15 \%$$

$$b2) \quad Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq E_{\max} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq \frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}} \Rightarrow \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n} \leq \left(\frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \leq n$$

$$n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \quad \text{error máximo } E = 1\% = 0,01$$

Mismo nivel de confianza.

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,01} \right)^2 \cdot 0,86 \cdot 0,14 \approx 4625,29 \quad , \text{ es decir, } n \geq 4626 \text{ individuos.}$$

Tamaño mínimo de la muestra : $n = 4626$