

CONTROL GLOBAL

El examen consta de **6 preguntas, todas con la misma puntuación (3,33)**, de las que puedes responder un **MÁXIMO de 3, obligatoriamente una de cada bloque. Importante:** Si haces 2 ejercicios del mismo bloque (**Álgebra, Análisis o Probabilidad**), sólo se corregirá el primero que hayas realizado. Si dejas un bloque en blanco, la puntuación máxima de la prueba será **6,66**.

BLOQUE DE ÁLGEBRA. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ÁLGEBRA 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula los valores del parámetro a para los cuales la matriz A no tiene inversa.
- b) Para $a = 1$, calcula la inversa de la matriz $A - 2 \cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- c) Para $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $X \cdot A + B^t = 2 \cdot X$.

ÁLGEBRA 2: En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €.

- a) Plantea el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.
- b) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
- c) Halla las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar los beneficios y determina cuál es el beneficio máximo.

BLOQUE DE ANÁLISIS. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ANÁLISIS 1: Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad (precio de venta). El coste de producción diario de " x " paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \leq x \leq 70$):

- Escribe las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos " x ".
- Determina el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razona la respuesta.
- Calcula el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = -x^2 - 2x$.

ANÁLISIS 2: Sea la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a , estudia la derivabilidad de $f(x)$.
- Para $a = -2$, estudia la monotonía y curvatura de la función $f(x)$. ¿Tiene algún punto de inflexión?
- Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -1$.

BLOQUE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 1:

a) Sean A y B dos sucesos con $P(A \cap B) = 0,1$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6$; $P(A|B) = 0,5$:

1. Calcula $P(B)$.
2. Calcula $P(B - A)$.

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

b) El tiempo de ensamblaje de un juguete sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 15$ minutos.

1. Si se afirma que el tiempo medio de ensamblaje de esos juguetes está entre 69,06 minutos y 74,94 minutos a partir de una muestra dada de 100 juguetes, ¿cuál es el valor de la media muestral? ¿cuál es el nivel de confianza con el que se hace esa afirmación?
2. Si se sabe que el tiempo medio de ensamblaje es de $\mu = 70$ minutos, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de ensamblaje sea inferior a 73 minutos, en muestras de 64 juguetes?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2:

a) Una investigación de mercado de 800 personas reveló los siguientes hechos sobre la capacidad de recordar un anuncio televisivo de un producto en particular y la adquisición de dicho producto:

	Recuerdan el anuncio	No recuerdan el anuncio
Compran el producto	160	80
No compran el producto	240	320

1. Calcula la probabilidad de que una persona recuerde el anuncio o compre el producto.
2. Si una persona recuerda el anuncio del producto, ¿qué probabilidad hay de que lo compre?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

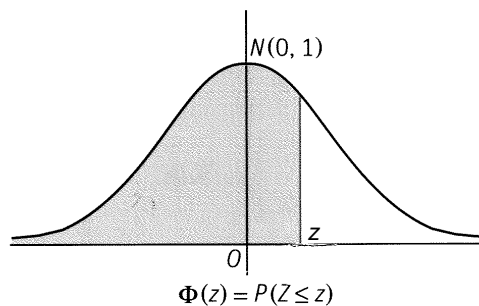
b) Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de $[0,23 ; 0,31]$.

1. Calcula el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo y el error máximo admitido.
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 3 % , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < +\infty$$

[illegible]

ÁLGEBRA 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcula los valores del parámetro a para los cuales la matriz A no tiene inversa.
- Para $a = 1$, calcula la inversa de la matriz $A - 2 \cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- Para $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $X \cdot A + B^t = 2 \cdot X$.

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = 3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Si $a = 0$ la matriz A no tiene inversa.

$$b) \text{ Si } a = 1, \text{ calcula } (A - I)^{-1}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Llamemos } C = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1 \neq 0 \text{ luego tiene inversa}$$

Para calcular la inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

Comprobación: $C \cdot C^{-1} = I$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Despeja X en la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{array}{l|l} X \cdot A + B^t = 2X & X \cdot (A - 2I)^{-1} (A - 2I) = -B^t \cdot (A - 2I)^{-1} \Rightarrow \\ X \cdot A - 2X = -B^t & \underbrace{\hspace{1cm}}_I \\ X \cdot (A - 2I) = -B^t & \boxed{X = -B^t \cdot (A - 2I)^{-1}} \end{array}$$

$$X = -B^t \cdot (A - 2I)^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ÁLGEBRA 2: En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €.

	Manual (min.)	Máquina (min.)	Beneficio
A(x) Motos	60	20	1500 €
B(y) Coches	45	40	2000 €
Máx.(min.)	7200	5400	

Minutos

$$120 \cdot 60 = 7200$$

$$90 \cdot 60 = 5400$$

Función objetivo:
Beneficio máximo

$$f(x, y) = 1500x + 2000y \text{ €}$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 45y \leq 7200 \\ 20x + 40y \leq 5400 \end{array} \right\} \div 15 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 480 \\ x + 2y \leq 270 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \leq 5y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{No} \\ \text{negatividad} \end{array}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$4x + 3y = 480$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{480}{3} = 160 \Rightarrow (0, 160) A$$

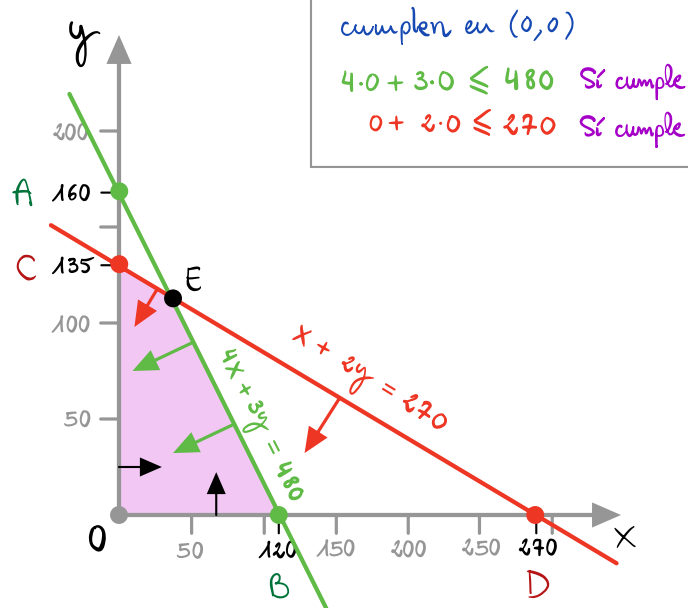
$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = \frac{480}{4} = 120 \Rightarrow (120, 0) B$$

$$x + 2y = 270$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{270}{2} = 135 \Rightarrow (0, 135) C$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 270 \Rightarrow (270, 0) D$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:



Región factible de vértices OCEB

Por último, busco la intersección entre las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 480 \\ x + 2y = 270 \end{array} \right\} \cdot 4 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 480 \\ 4x + 8y = 1080 \end{array} \right\} \text{restamos}$$

$$5y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{5} = 120 \Rightarrow x = 270 - 2 \cdot 120 = 30$$

Intersección (30, 120) E

Halla las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar los beneficios y determina cuál es el beneficio máximo.

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 1500x + 2000y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la función objetivo: O, C, E, B

$$O, f(0, 0) = 0 \text{ € trivial}$$

$$C, f(0, 135) = 270.000 \text{ €}$$

$$E, f(30, 120) = 285.000 \text{ €}$$

$$B, f(120, 0) = 180.000 \text{ €}$$

Obtenemos un beneficio máximo de 285.000 € en el vértice E produciendo 30 motores de moto y 120 motores de coche.

ANÁLISIS 1: Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad (precio de venta). El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \leq x \leq 70$):

- a) Escribe las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".

Precio por unidad 60€ $\Rightarrow$ Ingresos: $I(x) = 60 \cdot x$; Costes: $C(x) = x^2 - 10x$; $x \in [0, 70]$

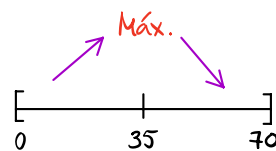
$$\text{Beneficios} = \text{Ingresos} - \text{Costes} \Rightarrow B(x) = 60 \cdot x - (x^2 - 10x) \Rightarrow B(x) = 70x - x^2$$

- b) Determina el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio.
¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razona la respuesta.

Maximizamos el beneficio si $B'(x) = 0$ Condición de extremo.

$$B'(x) = 70 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{70}{2} = 35$$

$$B''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 35 \text{ es un máximo local.}$$



Como la función está definida en el intervalo $[0, 70]$, vamos a comparar los bordes con el máximo:

$$\left. \begin{array}{l} B(0) = 0 \text{€} \\ B(35) = 1225 \text{€} \\ B(70) = 0 \text{€} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Obtenemos un beneficio máximo de } 1225 \text{€ produciendo } 35 \text{ paraguas.} \\ \text{El coste } C(x) = x^2 - 10x \Rightarrow C(35) = 875 \text{€} \\ \text{Los ingresos } I(x) = 60 \cdot x \Rightarrow I(35) = 2100 \text{€} \end{array}$$

- c) Calcula el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = -x^2 - 2x$.

Primero calculamos los **puntos de corte** para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los **límites de integración**.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + x + 1 = -x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Comprobación } -1 \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \text{ (coeficientes) } \checkmark \\ \text{Hay 2 intersecciones luego tenemos que calcular 1 área.} \end{array}$$

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$;

$$A = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} |2x^2 + 3x + 1| dx = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} \right| = \text{Regla de Barrow}$$

$$A = \left| \left(\frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - 1 \right) \right| = \left| -\frac{5}{24} + \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{24} u^2$$

ANÁLISIS 2: Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a , estudia la derivabilidad de $f(x)$.
- Para $a = -2$, estudia la monotonía y curvatura de la función $f(x)$. ¿Tiene algún punto de inflexión?
- Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -1$.

a) Estudiemos el **dominio**. En el trozo 1: $x-1=0 \Rightarrow x=1 \notin (-\infty, 0) \Rightarrow$ no es un problema

En el trozo 2: la función es polinómica y no hay problemas de dominio. $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

La función sólo podría tener problemas de continuidad en el punto de frontera que separa los intervalos.

Para que sea **continua** en $x=0$ debe verificarse $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + a = a = f(0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x=0, \text{ deberán coincidir los límites laterales.} \\ -1 = a \Rightarrow \boxed{a = -1} \text{ Condición de continuidad} \end{array}$$

La condición de **derivabilidad** es: $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{-1}{(x-1)^2} = 2x \text{ en } x=0 \\ -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{No es derivable en } x=0} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } a = -1 \Rightarrow f(x) \in \mathcal{C}^0 \mathbb{R} \\ \text{En cualquier caso } f(x) \in \mathcal{D} \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right\}$$

$$b) a = -2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Monotonía: Trozo 1 $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (-\infty, 0)$; $y' = 0$ Condición de extremo.

$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \neq 0$, condición de extremo $\Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay extremos.

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece todo el tiempo en $(-\infty, 0)$.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

Monotonía: Trozo 2 $f(x) = x^2 - 2$ $[0, \infty)$; $y' = 0$ Condición de extremo.

$f'(x) = 2x = 0$, condición de extremo $\Rightarrow x = 0 \in [0, \infty) \Rightarrow$ posible extremo

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un **mínimo local** en este intervalo $[0, \infty)$.

$f(0) = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 = \infty \Rightarrow$ la función crece todo el tiempo en $[0, \infty)$; $f'(x) > 0$

Decrece $(-\infty, 0)$
Crece $(0, \infty)$ Intervalos de Monotonía mínimo relativo $(0, -2)$ Extremo absoluto también

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Curvatura: Trozo 1 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $(-\infty, 0)$; $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

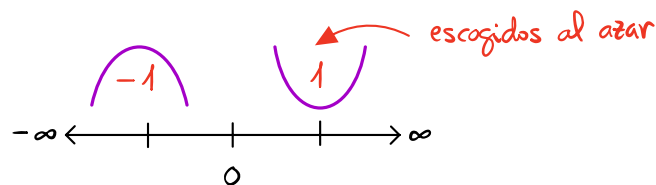
$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$, condición de punto de inflexión $\Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay P.I.

Curvatura: Trozo 2 $f(x) = x^2 - 2$ $[0, \infty)$; $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

$f''(x) = 2 \neq 0$, condición de punto de inflexión $\Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay P.I.

$y''(-1) = \frac{+}{-} < 0$ 

$y''(1) = + > 0$ 



En $x=0$ cambia la curvatura, pero técnicamente no es un P.I. Simplemente es la frontera entre los intervalos.

Cóncava  en $(-\infty, 0)$
Convexa  en $(0, \infty)$

c) Recta tangente en $x_0 = -1$ que corresponde al primer tramo, luego no importa el valor de a .

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ Ecuación punto-pendiente

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} \Rightarrow f(-1) = -\frac{1}{2} \\ f'(x) &= \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{4}(x+1) \Rightarrow \\ y + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{4}(x+1) \end{aligned} \text{ Recta tangente}$$

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 1:

a) Sean A y B dos sucesos con $P(A \cap B) = 0,1$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6$; $P(A|B) = 0,5$:

1. Calcula $P(B)$.

2. Calcula $P(B - A)$.

$$a1) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,5} = \boxed{\frac{1}{5} = 0,2}$$

$$a2) \quad P(B - A) = P(B \cup \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,1 = \boxed{0,1}$$

b) El tiempo de ensamblaje de un juguete sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 15$ minutos.

1. Si se afirma que el tiempo medio de ensamblaje de esos juguetes está entre 69,06 minutos y 74,94 minutos a partir de una muestra dada de 100 juguetes, ¿cuál es el valor de la media muestral? ¿cuál es el nivel de confianza con el que se hace esa afirmación?
2. Si se sabe que el tiempo medio de ensamblaje es de $\mu = 70$ minutos, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de ensamblaje sea inferior a 73 minutos, en muestras de 64 juguetes?

$$b1) \quad n = 100, \sigma = 15 \text{ min.} : \text{ I.C. } \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Tenemos una probabilidad de que la media de consumo (de toda la población) se halle dentro del intervalo: $\mu \in (\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (69,06 ; 74,94)$

$$69,06 \leq \mu \leq 74,94 \Rightarrow \text{LONGITUD o AMPLITUD} = 74,94 - 69,06 = 5,88 = 2 \cdot E \quad (\text{no piden este dato})$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\text{Extremo izquierdo} + \text{Extremo derecho}}{2} = \frac{69,06 + 74,94}{2} = \boxed{72 \text{ minutos}} \\ E &= \frac{\text{Extremo derecho} - \text{Extremo izquierdo}}{2} = \frac{74,94 - 69,06}{2} = 2,94 \text{ minutos} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{x} &= \dots \\ E &= \dots \end{aligned}} \right\} \boxed{\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$\text{El error } \boxed{E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 2,94 \cdot \frac{\sqrt{100}}{15} \simeq 1,96 \quad (\text{valor crítico})$$

$$Z_{\alpha/2} = 1,96 \quad \text{Busco la probabilidad de } 1,96 \text{ en la tabla} \Rightarrow 0,975$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,975 = 0,025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,025 = 0,05 \quad (\text{Nivel de significación})$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \boxed{95\%} \quad (\text{Nivel de confianza})$$

b2) $\mu = 70 \text{ minutos}$; $n = 64$; $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(70, \frac{15}{\sqrt{64}}\right)$
 $\sigma = 15 \text{ min. (no cambia)}$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Tipificación en una distribución muestral por la media

$$P(\bar{X} < 73) = P\left(Z < \frac{73 - 70}{\frac{15}{\sqrt{64}}}\right) = P(Z < 1,6) = 0,9452$$

Tipificamos

Redondeo a
2 decimales

Tabla 0,9452

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2:

- a) Una investigación de mercado de 800 personas reveló los siguientes hechos sobre la capacidad de recordar un anuncio televisivo de un producto en particular y la adquisición de dicho producto:

	Recuerdan el anuncio	No recuerdan el anuncio
Compran el producto	160	80
No compran el producto	240	320

1. Calcula la probabilidad de que una persona recuerde el anuncio o compre el producto.
2. Si una persona recuerda el anuncio del producto, ¿qué probabilidad hay de que lo compre?

Completamos la tabla de contingencia: $C \equiv \{\text{compran}\}$; $R \equiv \{\text{recuerdan}\}$

	R	$\bar{R}$	
C	$C \cap R$	$C \cap \bar{R}$	
$\bar{C}$	$\bar{C} \cap R$	$\bar{C} \cap \bar{R}$	

 $\Rightarrow$

	R	$\bar{R}$	
C	160	80	240
$\bar{C}$	240	320	560
	400	400	800

$160 + 80 = 240$
 $240 + 320 = 560$
 $160 + 240 = 400$
 $80 + 320 = 400$

a1) $P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = \frac{400}{800} + \frac{240}{800} - \frac{160}{800} = \frac{480}{800} = 0,6$

a2) $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{160}{400} = 0,4$

Condición

b) Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de $[0,23 ; 0,31]$.

1. Calcula el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo y el error máximo admitido.
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 3%, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

b1) I.C. para P y $\hat{p}$ conocida es: $\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$

Tenemos una probabilidad de que la proporción de votantes (de toda la población) se halle dentro del intervalo: $P \in (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,23 ; 0,31)$, es decir, entre el 23% y el 31%.

$$0,23 \leq \hat{p} \leq 0,31 \Rightarrow \text{Longitud o Amplitud} = 0,31 - 0,23 = 0,08 = 2 \cdot E \quad (\text{no piden este dato})$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{p} &= \frac{\text{Extremo izquierdo} + \text{Extremo derecho}}{2} = \frac{0,23 + 0,31}{2} = 0,27 \quad (27\%) \\ E &= \frac{\text{Extremo derecho} - \text{Extremo izquierdo}}{2} = \frac{0,31 - 0,23}{2} = 0,04 \quad (4\%) \end{aligned} \right\} \hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

$$\hat{p} = 0,27 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,27 = 0,73 ; n = 400$$

El error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = E \cdot \sqrt{\frac{n}{\hat{p} \cdot \hat{q}}} = 0,04 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,27 \cdot 0,73}} \simeq 1,80$ (valor crítico)

$$Z_{\alpha/2} = 1,80 \quad \text{Busco la probabilidad de } 1,80 \text{ en la tabla} \Rightarrow 0,9641$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9641 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9641 = 0,0359 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,0359 = 0,0718 \quad (\text{Nivel de significación})$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0,9282 \Rightarrow 92,82\% \quad (\text{Nivel de confianza})$$

$$b2) Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq E_{\text{máx}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq \frac{E_{\text{máx}}}{Z_{\alpha/2}} \Rightarrow \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n} \leq \left(\frac{E_{\text{máx}}}{Z_{\alpha/2}} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\text{máx}}} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \leq n$$

$$n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\text{máx}}} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$$

error máximo $E = 3\% = 0,03$

Mismo nivel de confianza. 92,82%

Tamaño mínimo de la muestra:

$$n \geq \left(\frac{1,80}{0,03} \right)^2 \cdot 0,27 \cdot 0,73 \simeq 709,56, \text{ es decir, } n \geq 710 \text{ electores.}$$

$$n = 710$$