

BLOQUE DE ÁLGEBRA. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ÁLGEBRA 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = (-2 \ 1 \ -1)$

- a) Calcula los valores del parámetro a para los cuales la matriz A no tiene inversa.
- b) Para $a = 2$, calcula la inversa de la matriz $A - I$.
- c) Para $a = 2$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X = B^t + X$.

ÁLGEBRA 2: Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A y el modelo B . El coste de producir un *kilómetro* del modelo A es igual a 2000 *euros*, mientras que el coste de producir un *kilómetro* del modelo B es igual a 500 *euros*. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 *kilómetros* de cable (entre los dos modelos), aunque del modelo B no podrán fabricarse más de 5 *kilómetros* y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8 *kilómetros* entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de *kilómetros* del modelo B mayor o igual a la de *kilómetros* del modelo A .

- a) Escribe las restricciones. Determina y dibuja la región factible del problema.
- b) Escribe la función objetivo. ¿Cuántos kilómetros de cable de cada tipo habrá que producir para minimizar el coste? ¿Cuál sería este coste mínimo?
- c) ¿Es posible la combinación de 3 *km* de cable A y 4 *km* de B ? Justifícalo analíticamente.

BLOQUE DE ANÁLISIS. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ANÁLISIS 1: Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función:

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 10, \text{ siendo } t \text{ el tiempo en años.}$$

- a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios.
- b) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
- c) Esboza la gráfica de la función $B(t)$.
- d) Dadas las parábolas $f(x) = x^2 - 2x - 4$ y $g(x) = -x^2 - 2x + 4$, halla el área del recinto encerrado entre ambas.

ANÁLISIS 2: La cantidad de CO₂ (en millones de toneladas) emitida a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & \text{si } 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ es el tiempo transcurrido en meses desde el comienzo del año.}$$

- a) Estudie los períodos en los que se produjo un aumento / disminución de la cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera.
- b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO₂ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
- c) Representa la gráfica de la función $C(t)$ teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.
- d) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en el punto de abscisa $t = 10$.

BLOQUE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Escoge sólo uno de los dos siguientes ejercicios:

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 1:

- a) El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 32$ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos. Si se elige una persona al azar:

1. Calcula la probabilidad de que el tiempo empleado sea menor de 30,5 minutos.
2. Calcula la probabilidad de que el tiempo empleado esté entre 29 y 37 minutos.

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

- b) El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

1. Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444 ; 124,6556) para la media poblacional, determina el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 3 g , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2:

- a) El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabajó (T) durante el período de emergencia sanitaria por Covid-19. De éstos, el 30 % padeció trastornos del sueño (S), mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajaron. Seleccionado un empleado al azar, calcula la probabilidad de que:

1. No haya teletrabajado, sabiendo que no tuvo trastornos del sueño.
2. No haya tenido trastornos del sueño y haya teletrabajado.

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas. Puedes hacer un diagrama de árbol.

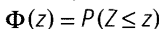
- b) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social.

1. Calcula el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 4 % , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

ÁLGEBRA 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores del parámetro a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a = 2$, calcula la inversa de la matriz $A - I$.

c) Para $a = 2$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X = B^t + X$.

$$a) \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -a & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & -1 \end{vmatrix} = a(-2) + (-1 + a) = -a - 1 = 0 \Rightarrow$$

Si $a = -1$ la matriz A no tiene inversa.

$$b) \quad \text{Si } a = 2, \text{ calcula } (A - I)^{-1}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Llamemos } C = A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + (-2 + 2) = -2$$

$|C| = -2 \neq 0$ luego tiene inversa

Para calcular la inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

Comprobación: $C \cdot C^{-1} = I$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Despeja X en la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{array}{l|l} A \cdot X = B^t + X & (A-I)^{-1} \cdot (A-I) \cdot X = (A-I)^{-1} \cdot B^t \Rightarrow X = (A-I)^{-1} \cdot B^t \\ A \cdot X - X = B^t & \underbrace{(A-I)^{-1} \cdot (A-I)}_I \cdot X = (A-I)^{-1} \cdot B^t \\ (A-I) \cdot X = B^t & \end{array}$$

$$X = (A-I)^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ÁLGEBRA 2: Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo *A* y el modelo *B*. El coste de producir un *kilómetro* del modelo *A* es igual a 2000 euros, mientras que el coste de producir un *kilómetro* del modelo *B* es igual a 500 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 *kilómetros* de cable (entre los dos modelos), aunque del modelo *B* no podrán fabricarse más de 5 *kilómetros* y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8 *kilómetros* entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de *kilómetros* del modelo *B* mayor o igual a la de *kilómetros* del modelo *A*.

Llamaremos :

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv \text{km cable A} \\ y \equiv \text{km cable B} \end{array} \right\}$$

Función objetivo :

$$f(x, y) = 2000x + 500y$$

- Escribe las restricciones. Determina y dibuja la región factible del problema.
- Escribe la función objetivo. ¿Cuántos kilómetros de cable de cada tipo habrá que producir para minimizar el coste? ¿Cuál sería este coste mínimo?
- ¿Es posible la combinación de 3 km de cable *A* y 4 km de *B*? Justifícalo analíticamente.

Restricciones :

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ x + y \leq 8 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y \leq 5 \\ y \geq x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{No negatividad}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$x + y = 6$$

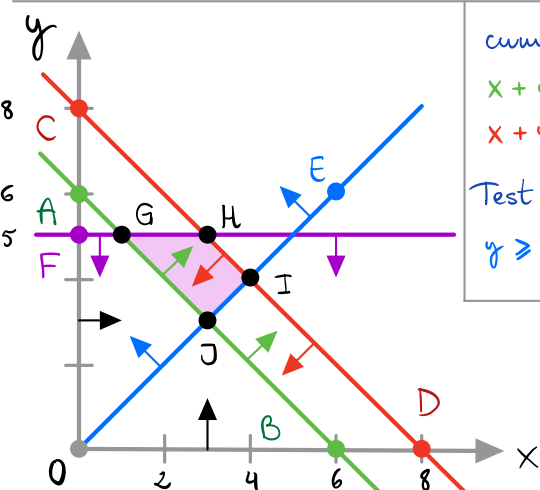
$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x=0 \Rightarrow y=6 \Rightarrow (0, 6) A \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow (6, 0) B \end{array} \right\}$$

$$x + y = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow (0, 8) C \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow (8, 0) D \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=5 \\ (0, 5) F \end{array} \right\}$$

$$y=x \Rightarrow (0, 0) \text{ y por ejemplo } (6, 6) E$$

Para encontrar la *región factible*, graficamos las rectas que delimitan las *restricciones*:



cumplen en $(0, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \text{ No cumple} \\ x + y \leq 8 \text{ Sí cumple} \end{array} \right\}$$

Test en $(1, 0)$

$$y \geq x \text{ No cumple}$$

Región factible de vértices *GHIJ*

Por último, busco la intersección entre las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} y=5 \\ x+y=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=6-5=1 \\ (1, 5) G \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=5 \\ x+y=8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=8-5=3 \\ (3, 5) H \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=x \\ x+y=8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x=8 \Rightarrow x=4 \\ (4, 4) I \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=x \\ x+y=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x=6 \Rightarrow x=3 \\ (3, 3) J \end{array}$$

La *función objetivo* es: $f(x, y) = 2000x + 500y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la *función objetivo* : *G, H, I, J*

$$\left. \begin{array}{l} G, f(1, 5) = 4500 \text{ €} \\ H, f(3, 5) = 8500 \text{ €} \\ I, f(4, 4) = 10000 \text{ €} \\ J, f(3, 3) = 7500 \text{ €} \end{array} \right\}$$

Obtenemos un coste mínimo de 4500 € en el vértice *G* fabricando 1 km de cable del tipo *A* y 5 km de *B*.

c) La combinación $(3, 4)$ sí cumple todas las condiciones.

ANÁLISIS 1: Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función:

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 10, \text{ siendo } t \text{ el tiempo en años.}$$

- Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios.
- ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
- Esboza la gráfica de la función $B(t)$.
- Dadas las parábolas $f(x) = x^2 - 2x - 4$ y $g(x) = -x^2 - 2x + 4$, halla el área del recinto encerrado entre ambas.

a) y b) Monotonía y extremos absolutos de la función $B(t)$.

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad [0, 10]$$

$$B'(t) = 3t^2 - 36t + 81 = 0, \text{ condición de extremo, simplifico } \div 3$$

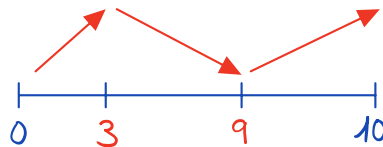
$$t^2 - 12t + 27 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} \begin{cases} 9 \in [0, 10] \\ 3 \in [0, 10] \end{cases}, \quad 9 \cdot 3 = \frac{27}{1} \checkmark \text{ comprobadas} \\ \text{posibles extremos}$$

$B''(t) = 6t - 36$; evaluamos los posibles extremos en la 2ª derivada.

$$B''(3) < 0 \Rightarrow t = 3 \text{ es un máximo local}$$

$$B''(9) > 0 \Rightarrow t = 9 \text{ es un mínimo local}$$



Los beneficios crecen en los períodos $[0, 3) \cup (9, 10]$ años.

Los beneficios disminuyen en el período $(3, 9)$ años.

Ahora evaluamos las imágenes de los extremos y las comparamos con los bordes.

$$\left. \begin{array}{ll} B(0) = -3 & \text{Mín. abs.} \\ B(3) = 105 & \text{Máx. abs.} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{ll} B(9) = -3 & \text{Mín. abs.} \\ B(10) = 7 & \end{array}$$

El beneficio mínimo absoluto es de 3000€ en pérdidas al inicio y a los 9 años.

El beneficio máximo absoluto es de 105.000€ a los 3 años.

c) Gráfica de $B(t)$

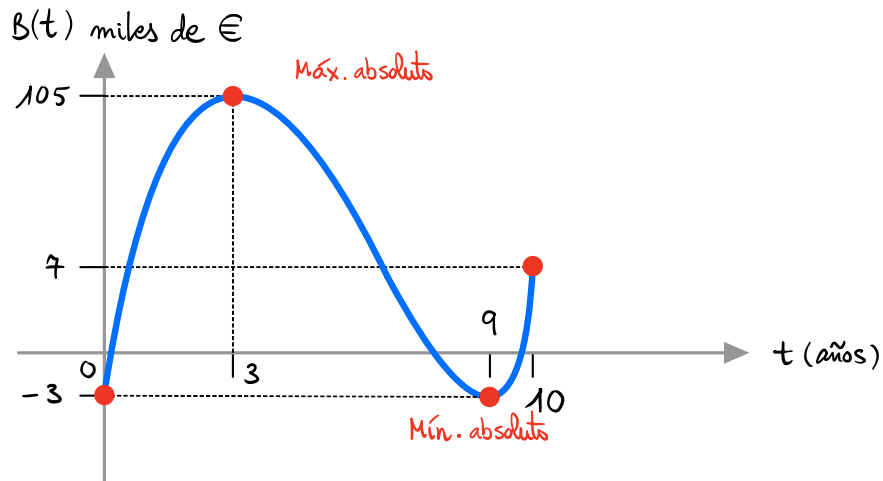
Puntos:

$(0, -3)$

$(3, 105)$

$(9, -3)$

$(10, 7)$



d) Área $f(x) = x^2 - 2x - 4$ y $g(x) = -x^2 - 2x + 4$.

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$;

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Hay 2 intersecciones luego tenemos que calcular 1 área.

$$A = \int_{-2}^2 |2x^2 - 8| dx = \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^2 = \text{Regla de Barrow}$$

$$A = \left| \left(2 \cdot \frac{2^3}{3} - 8 \cdot 2 \right) - \left(2 \cdot \frac{(-2)^3}{3} - 8(-2) \right) \right| = \left| 2 \cdot \frac{16}{3} - 32 \right| = \left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3} u^2$$

ANÁLISIS 2: La cantidad de CO₂ (en millones de toneladas) emitida a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & \text{si } 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t es el tiempo transcurrido en meses desde el comienzo del año.

- Estudie los períodos en los que se produjo un aumento / disminución de la cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera.
- ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO₂ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
- Representa la gráfica de la función $C(t)$ teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.
- Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en el punto de abscisa $t = 10$.

a) y b) Monotonía y extremos absolutos de la función $C(t)$. $D C(t) = [0, 12]$

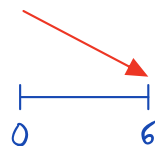
Trozo 1 $C(t) = 5 - \frac{t}{3} \quad [0, 6)$

$C'(t) = -\frac{1}{3} \neq 0$, condición de extremo $\Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay extremos.

$C'(t) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$ la función decrece todo el tiempo

$C(0) = 5 - \frac{0}{3} = 5$;

$C(6^-) = \lim_{t \rightarrow 6^-} 5 - \frac{6}{3} = 3 \Rightarrow t = 6$ es un máximo local en este intervalo $[0, 6)$.



Trozo 2 $C(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 \quad [6, 12]$

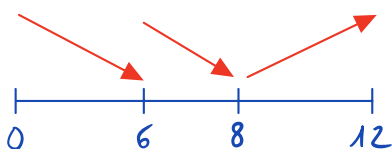
$C'(t) = \frac{t}{2} - 4 = 0$, condición de extremo $\Rightarrow \frac{t}{2} = 4 \Rightarrow t = 8$ ^{posible extremo} $\in [6, 12]$

$C''(t) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow t = 8$ es un mínimo local

$C(6^+) = \frac{1}{4}6^2 - 4 \cdot 6 + 18 = 3 \Rightarrow$ es continua en $t = 6$

$C(8) = \frac{1}{4}8^2 - 4 \cdot 8 + 18 = 2$ es un mínimo absoluto

$C(12) = \frac{1}{4}12^2 - 4 \cdot 12 + 18 = 6$ es un máximo absoluto



La emisión de CO₂ aumenta en el período $(8, 12]$ meses.

La emisión de CO₂ disminuye en el período $[0, 8)$ meses.

b)

La emisión mínima absoluta es de 2 millones de toneladas a los 8 meses.
La emisión máxima absoluta es de 6 millones de toneladas a los 12 meses.

c) Gráfica de $C(t)$

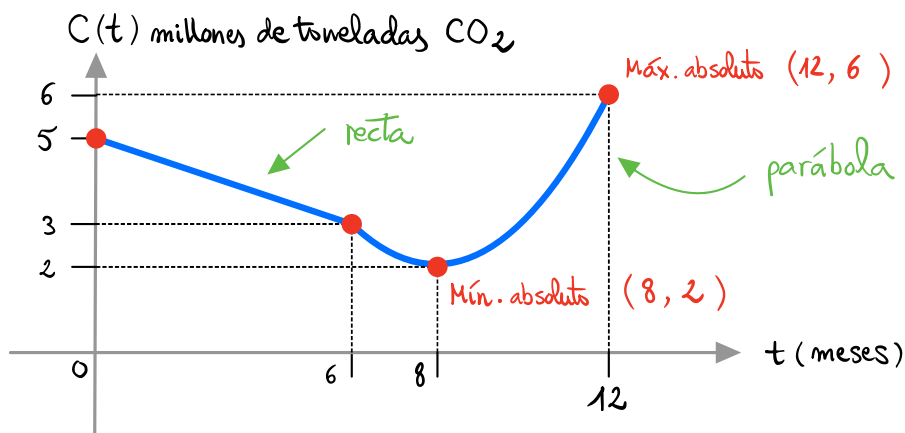
Puntos:

$(0, 5)$

$(6, 3)$

$(8, 2)$

$(12, 6)$



d) Recta tangente a $C(t)$ en $t_0 = 10$ (2º trazo)

$$C(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18, \quad t_0 = 10 \in [6, 12]$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación punto-pendiente,}$$

con nuestras variables lo reescribimos como:

$$C(t) - C(t_0) = C'(t)(t - t_0)$$

$$C(t_0) = C(10) = \frac{1}{4} \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 18 = 3$$

$$C'(t) = \frac{t}{2} - 4 \Rightarrow C'(10) = \frac{10}{2} - 4 = 1$$

$$C(t) - 3 = 1(t - 10)$$

$$C(t) - 3 = t - 10 \quad \text{recta tangente}$$

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 1:

a) El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 32$ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos. Si se elige una persona al azar:

1. Calcula la probabilidad de que el tiempo empleado sea menor de 30,5 minutos.
2. Calcula la probabilidad de que el tiempo empleado esté entre 29 y 37 minutos.

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

Llamamos X al tiempo. Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(32, 3)$ minutos

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} a_1) \quad P(X < 30,5) &= P\left(Z < \frac{30,5 - 32}{3}\right) = P(Z < -0,5) = \\ &= 1 - P(\underbrace{Z < 0,5}_{\text{TABLA}}) = 1 - 0,6915 = \boxed{0,3085} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2) \quad P(29 \leq X \leq 37) &= P\left(\frac{29 - 32}{3} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{37 - 32}{3}\right) = \\ &= P(\underbrace{-1}_{\text{Redondeo a 2 decimales}} \leq Z \leq \underbrace{1,67}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}) = P(Z \leq 1,67) - P(Z \leq -1) = \\ &= P(\underbrace{Z \leq 1,67}_{\text{TABLA}}) - [1 - P(\underbrace{Z \leq 1}_{\text{TABLA}})] = 0,9525 - (1 - 0,8413) = \boxed{0,7938} \end{aligned}$$

b) El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

1. Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117,3444 ; 124,6556)$ para la media poblacional, determina el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 3 g , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

b1) $n = 81$, $\bar{x} = 20g$, $\sigma = 20g$: I.C. $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Tenemos una probabilidad de que la media de consumo (de toda la población) se halle dentro del intervalo: $\mu \in (\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (117,3444 ; 124,6556)$

$$117,3444 \leq \mu \leq 124,6556 \Rightarrow \text{LONGITUD o AMPLITUD} = 124,6556 - 117,3444 = 7,3112 = 2 \cdot E$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\text{Extremo izquierdo} + \text{Extremo derecho}}{2} = \frac{117,3444 + 124,6556}{2} = 121g \\ E &= \frac{\text{Extremo derecho} - \text{Extremo izquierdo}}{2} = \frac{124,6556 - 117,3444}{2} = 3,6556g \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{x} &= \\ E &= \end{aligned}} \right\} \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 3,6556 \cdot \frac{\sqrt{81}}{20} \approx 1,645$ (Valor crítico)

$Z_{\alpha/2} = 1,645$ Busco la probabilidad de 1,645 en la tabla.

Hago la media de las probabilidades correspondientes a 1,64 y 1,65 :

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{0,9495 + 0,9505}{2} = 0,95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,05 = 0,1 \text{ (Nivel de significación)}$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow 90\% \text{ (Nivel de confianza)}$$

b2) $Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E_{\text{máx}} \Rightarrow \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\text{máx}}} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\text{máx}}} \right)^2 \leq n$

$$n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\text{máx}}} \right)^2 \quad \text{error máximo } E_{\text{máx}} = 3g$$

Mismo nivel de confianza.

$$n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 20}{3} \right)^2 = 120,27 , \text{ es decir, } n \geq 121 \text{ estudiantes}$$

Tamaño mínimo de la muestra : $n = 121$

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2:

a) El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabajó (T) durante el período de emergencia sanitaria por Covid-19. De éstos, el 30 % padeció trastornos del sueño (S), mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajaron. Seleccionado un empleado al azar, calcula la probabilidad de que:

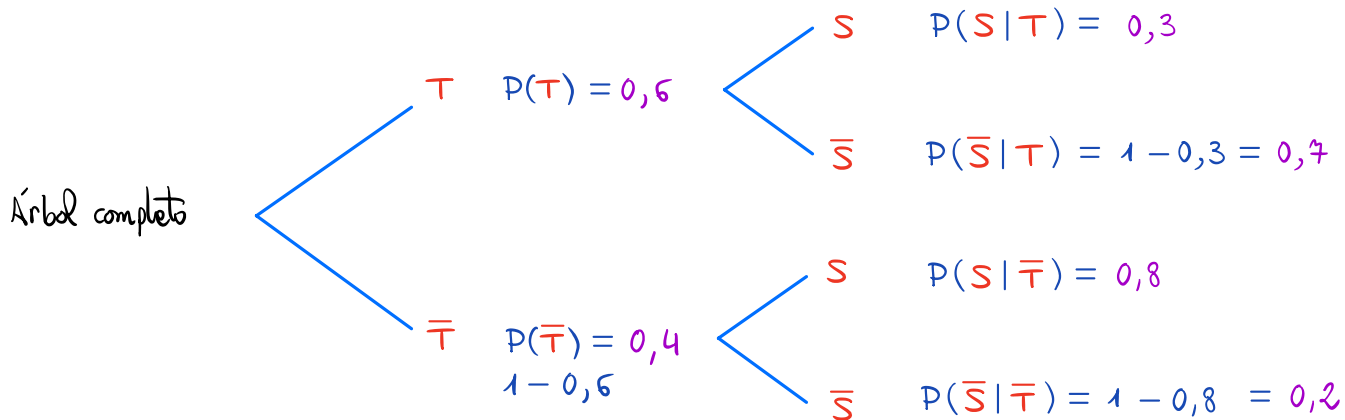
1. No haya teletrabajado, sabiendo que no tuvo trastornos del sueño.
2. No haya tenido trastornos del sueño y haya teletrabajado.

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas. Puedes hacer un diagrama de árbol.

Sean los sucesos $T = \{\text{teletrabajó}\}$; $S = \{\text{padeció trastornos del sueño}\}$

Construimos un diagrama en árbol:

$$P(T) = 0,6 \quad , \quad P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,6 = 0,4 \quad , \quad P(S|T) = 0,3 \quad , \quad P(S|\bar{T}) = 0,8$$



a1) Probabilidad de que no haya teletrabajado sabiendo que no tuvo trastornos de sueño.

$$P(\bar{T}|\bar{S}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{T}) \cdot P(\bar{S}|\bar{T})}{P(\bar{S})} = \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,5} = \boxed{0,16} \quad (\text{Teorema de Bayes})$$

$$P(\bar{S}) = P(T \cap \bar{S}) + P(\bar{T} \cap \bar{S}) = P(T) \cdot P(\bar{S}|T) + P(\bar{T}) \cdot P(\bar{S}|\bar{T})$$

$$P(\bar{S}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,5 \quad (\text{Probabilidad total})$$

a2) Probabilidad de que no haya tenido trastornos de sueño y haya teletrabajado.

$$P(\bar{S} \cap T) = P(T \cap \bar{S}) = P(T) \cdot P(\bar{S}|T) = 0,6 \cdot 0,7 = \boxed{0,42}$$

b) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social.

1. Calcula el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 4 % , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

b1) El estimador de la proporción es $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{320}{500} = 0,64$; $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,64 = 0,36$

$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2}$

 Es la probabilidad que busco en la tabla.

Nivel de confianza $p = 0,96 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,04}{2} = 1 - 0,02 = 0,98 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,02} = 2,055$$

↑
Tabla

media de 2,05 y 2,06

$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$

El intervalo de confianza para p y $\hat{p}$ conocida es :

$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$

siendo el error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{500}} \approx 0,044$ (3 decimales)

Tenemos una probabilidad del 96% de que la proporción de menores (de toda la población) se halle dentro del intervalo: $p \in (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$

$p \in (0,64 - 0,044, 0,64 + 0,044)$ $0,596 \leq p \leq 0,684$, es decir entre el 59,6 % y el 68,4 %

b2) $Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq E_{\max} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq \frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}} \Rightarrow \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n} \leq \left(\frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \leq n$

$n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$

 error máximo $E = 4\% = 0,04$
Mismo nivel de confianza.

$$n \geq \left(\frac{2,055}{0,04} \right)^2 \cdot 0,64 \cdot 0,36 \approx 608,1156, \text{ es decir, } n \geq 609 \text{ individuos.}$$

Tamaño mínimo de la muestra :

$n = 609$