

1. **ÁLGEBRA:** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} k & -2 & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula los valores del parámetro  $k$  para los cuales la matriz  $A$  no tiene inversa.
- b) Calcula la matriz  $2 \cdot C - B^t$ .
- c) Para  $k = 0$ , calcula la inversa de la matriz  $I + A$ .
- d) Para  $k = 0$  despeja y calcula  $X$  en la ecuación matricial:  $X + X \cdot A + B^t = 2 \cdot C$ .

2. **ÁLGEBRA:** Un hipermercado necesita, como mínimo, 6 cajas de manzanas, 8 de peras y 10 de naranjas. Para abastecerse puede acudir a dos proveedores  $A$  y  $B$  que suministran fruta en contenedores. Cada contenedor del proveedor  $A$  se compone de 1 caja de manzanas, 2 de peras y 1 de naranjas, y cuesta 60 €, mientras que cada contenedor del proveedor  $B$  se compone de 1 caja de manzanas, 1 de peras y 5 de naranjas, y cuesta 75 €.

- a) Escribe las restricciones. Determina y dibuja la región factible del problema.
- b) Escribe la función objetivo. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada proveedor para que el coste sea mínimo?
- c) ¿Cuál sería este coste mínimo?
- d) ¿Es posible la combinación de 6 contenedores de  $A$  y 3 de  $B$ ? Justifícalo analíticamente.

3. **ANÁLISIS:** El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista  $N(t)$ , viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si } 0 < t \leq 9 \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si } 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

donde  $t$  es el tiempo transcurrido en horas desde la medianoche, es decir, las 0 : 00 h

- ¿Es continua la función  $N(t)$  ? Justifica la respuesta.
  - ¿Entre qué horas aumentó o disminuyó el número de vehículos que pasaba por el peaje? ¿A qué hora pasaron el mayor y el menor número de vehículos y cuántos eran? Justifica la respuesta.
  - Esboza la gráfica de la función  $N(t)$  .
  - Dadas las parábolas  $f(x) = x^2 - 18$  y  $g(x) = -x^2 + 32$  , halla el área del recinto encerrado entre ambas.
4. **ANÁLISIS:** En un entorno controlado, el tamaño de una población de aves  $P(t)$  (en cientos), viene dado por la función:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

en donde  $t$  es el tiempo transcurrido en años.

- ¿Es continua la función  $P(t)$  ? Justifica la respuesta.
- ¿Entre qué años aumentó o disminuyó la población? ¿En algún momento la población es mínima y, si es así, a cuánto asciende dicha población? Justifica la respuesta.
- Determina el valor de la población a largo plazo y esboza la gráfica de la función  $P(t)$  .
- Dadas las parábolas  $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$  y  $g(x) = -x^2 - x + 6$  , halla el área del recinto encerrado entre ambas.

## 5. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

- a) Para un campamento de verano se ha seleccionado un 40 % de las solicitudes presentadas. Un 10 % de las solicitudes seleccionadas corresponden a familias numerosas y un 25 % de las no seleccionadas también son familias numerosas.

1. Calcula el porcentaje de familias numerosas que han presentado solicitud para el campamento.
2. Se sabe que una determinada solicitud no corresponde a una familia numerosa. Determina la probabilidad de que haya sido seleccionada para participar en el campamento.

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

- b) La duración de una bombilla *LED*, en horas ( $h$ ), se puede aproximar con una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  desconocida y desviación típica igual a 1000  $h$ .

1. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 81 bombillas *LED* y la media muestral de su duración ha sido de 8000  $h$ . Calcula un intervalo de confianza del 99 % para la media  $\mu$ .
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 100  $h$ , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

## 6. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

- a) Según un estudio, el número de horas prácticas necesarias para la obtención del permiso de conducir, sigue una distribución normal de media 24  $h$  y desviación típica 3  $h$ .

1. ¿Qué probabilidad hay de obtener el permiso de conducir con 20 horas de prácticas o menos?
2. ¿Qué probabilidad hay de obtener el permiso de conducir haciendo entre 21 y 27 horas de prácticas?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

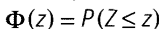
- b) Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella, hay 175 hembras.

1. Calcula un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94 %.
2. A la vista del resultado del muestreo, se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 2 %. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

### DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. **ÁLGEBRA:** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} k & -2 & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores del parámetro  $k$  para los cuales la matriz  $A$  no tiene inversa.

b) Calcula la matriz  $2 \cdot C - B^t$ .

c) Para  $k = 0$ , calcula la inversa de la matriz  $I + A$ .

d) Para  $k = 0$  despeja y calcula  $X$  en la ecuación matricial:  $X + X \cdot A + B^t = 2 \cdot C$ .

$$a) |A| = \begin{vmatrix} k & -2 & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} k & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (2k - 2) = 0 \Rightarrow k = 1$$

Si  $k = 1$  la matriz  $A$  no tiene inversa.

b) Calcula  $2 \cdot C - B^t$

$$2 \cdot C - B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Si  $k = 0$ , calcula  $(I + A)^{-1}$ ;  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{llamemos } Z = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa:  $z^{-1} = \frac{1}{|z|} \cdot [\text{Adj}(z)]^t$ , La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(z)]^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (I + A)^{-1}$$

$$\text{Comprobación: } z \cdot z^{-1} = I, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

d) Para  $k = 0$  despeja y calcula  $X$  en la ecuación matricial:  $X + X \cdot A + B^t = 2 \cdot C$ .

$$\begin{array}{l|l} X + X \cdot A + B^t = 2 \cdot C & X \cdot \underbrace{(I + A)}_I \cdot (I + A)^{-1} = (2 \cdot C - B^t) \cdot (I + A)^{-1} \\ X + X \cdot A = 2 \cdot C - B^t & \\ X \cdot (I + A) = 2 \cdot C - B^t & \Rightarrow X = (2 \cdot C - B^t) \cdot (I + A)^{-1} \end{array}$$

$$X = (2 \cdot C - B^t) \cdot (I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **ÁLGEBRA:** Un hipermercado necesita, como mínimo, 6 cajas de manzanas, 8 de peras y 10 de naranjas. Para abastecerse puede acudir a dos proveedores A y B que suministran fruta en contenedores. Cada contenedor del proveedor A se compone de 1 caja de manzanas, 2 de peras y 1 de naranjas, y cuesta 60 €, mientras que cada contenedor del proveedor B se compone de 1 caja de manzanas, 1 de peras y 5 de naranjas, y cuesta 75 €.

Llamaremos:

$x \equiv$  contenedores A  
 $y \equiv$  contenedores B

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{60x}_A + \underbrace{75y}_B$$

- Escribe las restricciones. Determina y dibuja la región factible del problema.
- Escribe la función objetivo. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada proveedor para que el coste sea mínimo?
- ¿Cuál sería este coste mínimo?
- ¿Es posible la combinación de 6 contenedores de A y 3 de B? Justifícalo analíticamente.

|      | Manzanas | Peras | Naranjas | Coste |
|------|----------|-------|----------|-------|
| A(x) | 1        | 2     | 1        | 60 €  |
| B(y) | 1        | 1     | 5        | 75 €  |
| Mín. | 6        | 8     | 10       |       |

### Restricciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad \text{(No negatividad)}$$

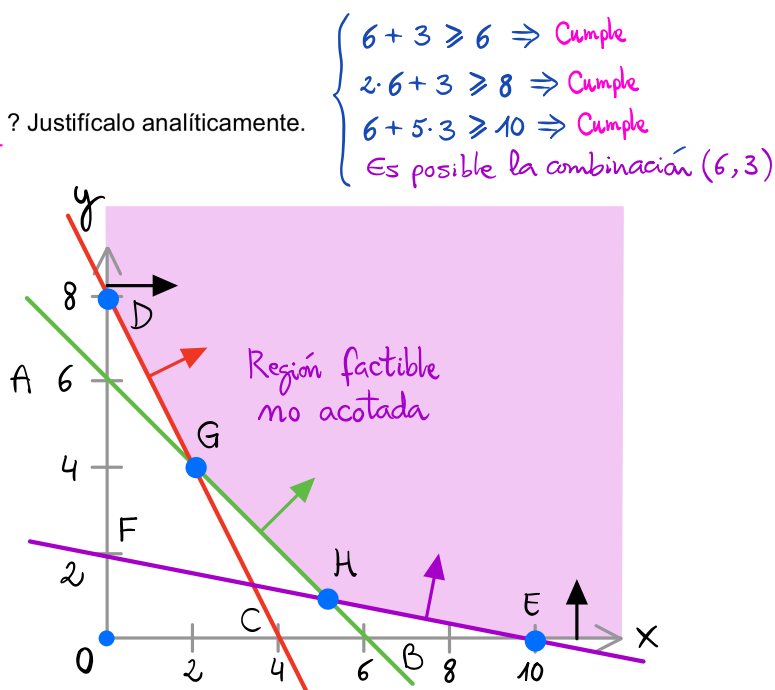
Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los **puntos de corte** con los ejes  $x=0$  e  $y=0$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=6 \quad (6,0) \text{ A} \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=6 \quad (0,6) \text{ B} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=4 \quad (4,0) \text{ C} \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=8 \quad (0,8) \text{ D} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + 5y = 10 \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=10 \quad (10,0) \text{ E} \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0,2) \text{ F} \end{array} \right\}$$

Evaluamos las restricciones con el punto (0,0)

$$\begin{array}{l} x + y \geq 6 \Rightarrow 0 \geq 6 \quad \text{No cumple} \\ 2x + y \geq 8 \Rightarrow 0 \geq 8 \quad \text{No cumple} \\ x + 5y \geq 10 \Rightarrow 0 \geq 10 \quad \text{No cumple} \end{array}$$



Por último, busco la intersección entre las restricciones. Para ahorrar trabajo, me fijo sólo en las intersecciones que me hacen falta: G y H.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{array} \right\} G \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 8 - 4 = 4 \end{array} \right| (2,4) G$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x + 5y = 10 \end{array} \right\} H \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y = 4, y = 1 \\ x = 6 - 1 = 5 \end{array} \right| (5,1) H$$

La **función objetivo** es:  $f(x, y) = 60x + 75y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: D, G, H, E

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,8) D \Rightarrow f(0,8) = 600 \text{ €} \\ (2,4) G \Rightarrow f(2,4) = 420 \text{ €} \\ (5,1) H \Rightarrow f(5,1) = 375 \text{ €} \\ (10,0) E \Rightarrow f(10,0) = 600 \text{ €} \end{array} \right.$$

Mínimo coste de 375 € con 5 contenedores del tipo A y 1 contenedor del tipo B.

3. **ANÁLISIS:** El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista  $N(t)$ , viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si } 0 < t \leq 9 \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si } 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

donde  $t$  es el tiempo transcurrido en horas desde la medianoche, es decir, las 0 : 00 h

- a) ¿Es continua la función  $N(t)$ ? Justifica la respuesta.
- b) ¿Entre qué horas aumentó o disminuyó el número de vehículos que pasaba por el peaje? ¿A qué hora pasaron el mayor y el menor número de vehículos y cuántos eran? Justifica la respuesta.
- c) Esboza la gráfica de la función  $N(t)$ .
- d) Dadas las parábolas  $f(x) = x^2 - 18$  y  $g(x) = -x^2 + 32$ , halla el área del recinto encerrado entre ambas.

a) Continuidad. El único punto crítico es  $t=9$ . 
$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{9} \cdot t^2 - \frac{2}{3}t + 3 & \text{si } 0 < t \leq 9 \\ -\frac{1}{9} \cdot t^2 + \frac{10}{3}t - 15 & \text{si } 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 9^-} \frac{1}{9} \cdot t^2 - \frac{2}{3}t + 3 &= 6 = N(9) \\ \lim_{t \rightarrow 9^+} -\frac{1}{9} \cdot t^2 + \frac{10}{3}t - 15 &= 6 \end{aligned} \right\} \text{ luego } N(t) \text{ es continua en } t=9$$

b) Monotonía y extremos absolutos de la función  $N(t)$ . 
$$N'(t) = \begin{cases} \frac{2}{9} \cdot t - \frac{2}{3} & \text{si } 0 < t < 9 \\ -\frac{2}{9} \cdot t + \frac{10}{3} & \text{si } 9 < t < 24 \end{cases}$$

**Trozo 1**  $N(t) = \frac{1}{9} \cdot t^2 - \frac{2}{3}t + 3 \quad (0, 9]$

$$N'(t) = \frac{2}{9} \cdot t - \frac{2}{3} = 0, \text{ condición de extremo } \Rightarrow t = \frac{9}{2} = 3 \in (0, 9]$$

$$N''(t) = \frac{2}{9} > 0, \quad N''(3) > 0 \Rightarrow t = 3 \text{ es un mínimo local}$$

$$N(0) = 3$$

$$N(3) = \frac{1}{9} \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = 2 \text{ es un mínimo local en } (3, 2)$$

$$N(9) = 6$$

**Trozo 2**  $N(t) = -\frac{1}{9} \cdot t^2 + \frac{10}{3}t - 15 \quad (9, 24]$

$$N'(t) = -\frac{2}{9} \cdot t + \frac{10}{3} = 0, \text{ condición de extremo } \Rightarrow t = \frac{10}{2} \cdot \frac{9}{3} = 15 \in (9, 24]$$

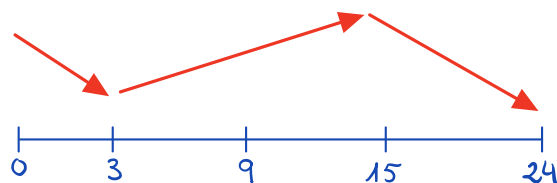
$$N''(t) = -\frac{2}{9} < 0, \quad N''(15) < 0 \Rightarrow t = 15 \text{ es un máximo local}$$

$$N(9) = 6 \quad (\text{límite por la derecha})$$

$$N(15) = -\frac{1}{9} \cdot 15^2 + \frac{10}{3} \cdot 15 - 15 = 10 \text{ es un máximo local en } (15, 10) \text{ es el máximo absoluto}$$

$$N(24) = 1 \text{ es el mínimo absoluto de la función en } (24, 1)$$

Veamos el diagrama de monotonía.



El nº de vehículos disminuye en los periodos  $[0, 3) \cup (15, 24]$  horas

El nº de vehículos aumenta en el periodo  $(3, 15)$  horas

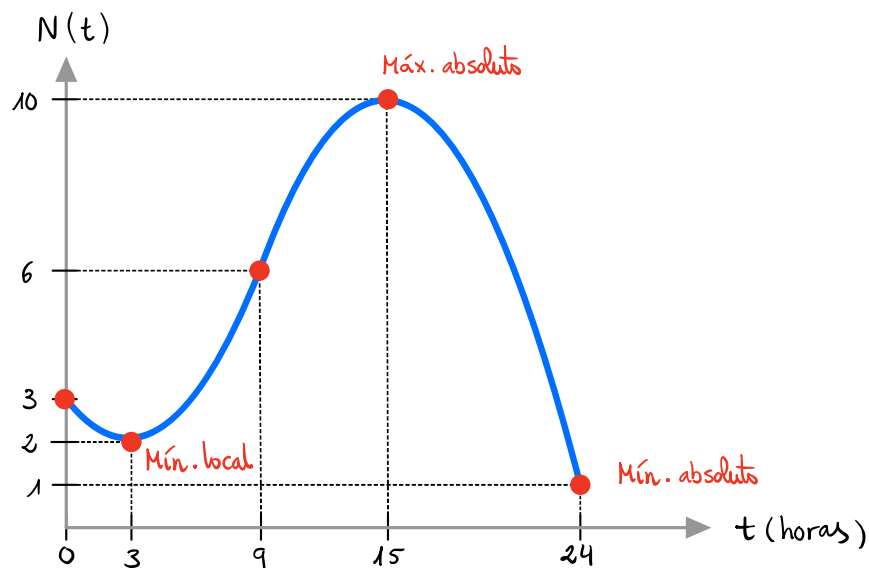
El mayor número de vehículos, 10, se produce a las 15 horas.

El menor número de vehículos, 1, se produce a las 24 horas.

c) Gráfica de la función  $N(t)$ .

Puntos:

$(0, 3)$   
 $(3, 2)$   
 $(9, 6)$   
 $(15, 10)$   
 $(24, 1)$



d) Dadas las parábolas  $f(x) = x^2 - 18$  y  $g(x) = -x^2 + 32$ , halla el área del recinto encerrado entre ambas.

El área  $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  ;

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 18 = -x^2 + 32 \Rightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{50}{2} = 25 \Rightarrow x = \begin{matrix} 5 \\ -5 \end{matrix}$$

Hay 2 intersecciones luego tenemos que calcular 1 área.

$$A = \int_{-5}^5 |2x^2 - 50| dx = \left| \left[ 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 50 \cdot x \right]_{-5}^5 \right| = \text{Regla de Barrow}$$

$$A = \left( 2 \cdot \frac{5^3}{3} - 50 \cdot 5 \right) - \left( 2 \cdot \frac{(-5)^3}{3} - 50 \cdot (-5) \right) = \left| -\frac{1000}{3} \right| \approx 333,3 \text{ u}^2$$

4. **ANÁLISIS:** En un entorno controlado, el tamaño de una población de aves  $P(t)$  (en cientos), viene dado por la función:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{si } t > 10 \end{cases} \quad \text{en donde } t \text{ es el tiempo transcurrido en años.}$$

- a) ¿Es continua la función  $P(t)$ ? Justifica la respuesta.
- b) ¿Entre qué años aumentó o disminuyó la población? ¿En algún momento la población es mínima y, si es así, a cuánto asciende dicha población? Justifica la respuesta.
- c) Determina el valor de la población a largo plazo y esboza la gráfica de la función  $P(t)$ .
- d) Dadas las parábolas  $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$  y  $g(x) = -x^2 - x + 6$ , halla el área del recinto encerrado entre ambas.

a) Continuidad. El único punto crítico es  $t=10$ .  $P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 10^-} t^2 - 8t + 50 &= 70 = P(10) \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} 95 - \frac{250}{t} &= 70 \end{aligned} \right\} \text{ luego } P(t) \text{ es continua en } t=10$$

b) Monotonía y extremos absolutos de la función  $P(t)$ .  $P'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & \text{si } 0 < t < 10 \\ \frac{250}{t^2} & \text{si } t > 10 \end{cases}$

**Trozo 1**  $P(t) = t^2 - 8t + 50 \quad [0, 10]$

$$P'(t) = 2t - 8 = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow t = \frac{8}{2} = 4 \in [0, 10]$$

$$P''(t) = 2 > 0, P''(4) > 0 \Rightarrow t=4 \text{ es un mínimo local}$$

$$P(0) = 50$$

$$P(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 50 = 34 \text{ es un mínimo local en } (4, 34)$$

$$P(10) = 70$$

**Trozo 2**  $P(t) = 95 - \frac{250}{t} \quad (10, \infty)$

$$P'(t) = \frac{250}{t^2} = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow 250 \neq 0 \text{ ¡ Absurdo! No hay extremos}$$

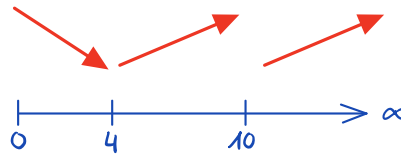
$$P'(t) = \frac{250}{t^2} > 0 \text{ siempre, luego la función es creciente en todo el intervalo.}$$

$$P(10) = 70 \text{ (límite por la derecha)}$$

$$\text{Veamos hacia dónde tiende la función: } \lim_{t \rightarrow \infty} 95 - \frac{250}{t} = 95 \text{ Asíntota horizontal}$$

Vemos que, comparando ambos trozos,  $t=4$  años es el **mínimo absoluto** con una población de 3400 aves.

Veamos el diagrama de monotonía.



La población de aves disminuye en el período  $[0, 4)$  años.

La población de aves aumenta en el período  $(4, \infty)$  años (del 4º en adelante).

El menor número de aves, 3400, se produce a los 4 años.

c) Gráfica de la función  $P(t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 95 - \frac{250}{t} = 95 \quad (9.500 \text{ aves a largo plazo})$$

Puntos:

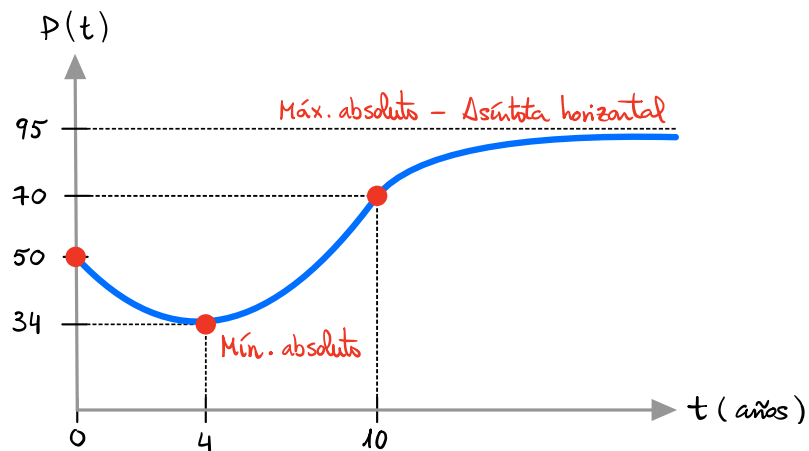
$(0, 50)$

$(4, 34)$

$(10, 70)$

Asíntota horizontal

$$P(t) = 95$$



d) Dadas las parábolas  $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$  y  $g(x) = -x^2 - x + 6$ , halla el área del recinto encerrado entre ambas.

El área  $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  ;

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = -x^2 - x + 6 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{Comprobación: } 2 \cdot (-3) = \frac{-6}{1} \checkmark$$

Hay 2 intersecciones luego tenemos que calcular 1 área.

$$A = \int_{-3}^2 |3x^2 + 3x - 18| dx = \left| \left[ \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 18x \right]_{-3}^2 \right| = \left| \left[ x^3 + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 18x \right]_{-3}^2 \right| = \text{Regla de Barrow}$$

$$A = \left( 2^3 + 3 \cdot \frac{2^2}{2} - 18 \cdot 2 \right) - \left( (-3)^3 + 3 \cdot \frac{(-3)^2}{2} - 18(-3) \right) = \left| -22 - \frac{81}{2} \right| = \left| -\frac{125}{2} \right| = \frac{125}{2} u^2 = 62,5 u^2$$

## 5. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

a) Para un campamento de verano se ha seleccionado un 40 % de las solicitudes presentadas. Un 10 % de las solicitudes seleccionadas corresponden a familias numerosas y un 25 % de las no seleccionadas también son familias numerosas.

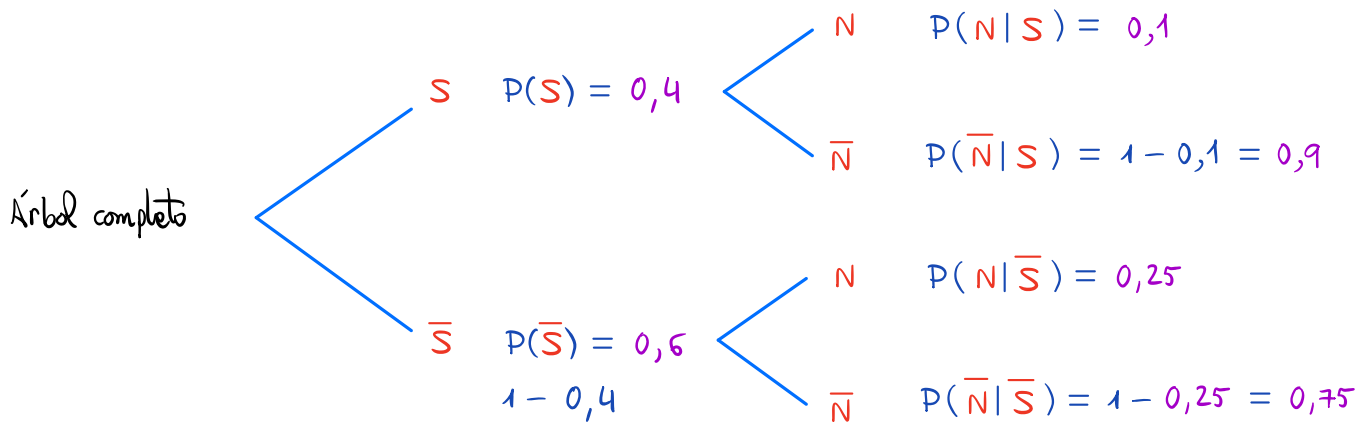
1. Calcula el porcentaje de familias numerosas que han presentado solicitud para el campamento.
2. Se sabe que una determinada solicitud no corresponde a una familia numerosa. Determina la probabilidad de que haya sido seleccionada para participar en el campamento.

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

Sean los sucesos  $S = \{ \text{la familia es seleccionada} \}$  ;  $N = \{ \text{la familia es numerosa} \}$

Construimos un diagrama en árbol:

$$P(S) = 0,4 \quad , \quad P(N|S) = 0,1 \quad , \quad P(N|\bar{S}) = 0,25 \quad , \quad P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,4 = 0,6$$



a1) Porcentaje de familias numerosas . Probabilidad total:

$$P(N) = P(S \cap N) + P(\bar{S} \cap N) = P(S) \cdot P(N|S) + P(\bar{S}) \cdot P(N|\bar{S})$$

$$P(N) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,25 = 0,19 \Rightarrow 19\% \text{ de las familias son numerosas.}$$

a2) Probabilidad de familia seleccionada sabiendo que no es numerosa . Teorema de Bayes:

$$P(S|\bar{N}) = \frac{P(S \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{P(S) \cdot P(\bar{N}|S)}{1 - P(N)} = \frac{0,4 \cdot 0,9}{0,81} = \frac{4}{9} \approx 0,4444$$

$$P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0,19 = 0,81$$

b) La duración de una bombilla LED, en horas ( $h$ ), se puede aproximar con una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  desconocida y desviación típica igual a 1000  $h$ .

1. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 81 bombillas LED y la media muestral de su duración ha sido de 8000  $h$ . Calcula un intervalo de confianza del 99 % para la media  $\mu$ .
2. Para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 100  $h$ , ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

b1)  $n = 81$  ,  $\bar{x} = 8000 h$  ,  $\sigma = 1000 h$   $1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2}$  Es la probabilidad que busco en la tabla.

Nivel de confianza  $p = 0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \Rightarrow$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,01}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$  ,  $Z_{\alpha/2} = Z_{0,005}$  Busco la probabilidad 0,995 en la tabla y busco el valor  $Z$  más próximo y calculo la media de 2,57 y 2,58  $\Rightarrow Z_{0,005} = 2,575$

El intervalo de confianza para  $\mu$  y  $\sigma$  conocida es :  $\left( \bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

siendo el error  $E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$   $= 2,575 \cdot \frac{1000}{\sqrt{81}} \approx 286 h$   $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Tenemos una probabilidad del 99 % de que la media ( de toda la población ) de bombillas , se halle dentro del intervalo :  $\mu \in (\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$\mu \in ( 8000 - 286 , 8000 + 286 ) h$   $7714 \leq \mu \leq 8286$   $h$

b2)  $Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E_{\max} \Rightarrow \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \left( \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \right)^2 \leq n$

$n \geq \left( \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \right)^2$  error máximo  $E_{\max} = 100 h$   
Mismo nivel de confianza.

$n \geq \left( \frac{2,575 \cdot 1000}{100} \right)^2 = 663,06$  , es decir ,  $n \geq 664$  bombillas .

Tamaño mínimo de la muestra :  $n = 664$

## 6. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

a) Según un estudio, el número de horas prácticas necesarias para la obtención del permiso de conducir, sigue una distribución normal de media 24 h y desviación típica 3 h.

1. ¿Qué probabilidad hay de obtener el permiso de conducir con 20 horas de prácticas o menos?
2. ¿Qué probabilidad hay de obtener el permiso de conducir haciendo entre 21 y 27 horas de prácticas?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

Llamamos  $X \equiv \{ \text{nº horas de prácticas} \}$ ,  $\mu = 24 \text{ h}$ ,  $\sigma = 3 \text{ h}$

Sigue una distribución normal  $X \sim N(\mu, \sigma) = N(24, 3)$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} a1) \quad P(X \leq 20) &= P\left(Z \leq \frac{20-24}{3}\right) = P(Z \leq -1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33) = \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ &\quad \text{Tipificamos} \quad \quad \text{Redondeo a} \quad \quad \text{Tabla } 0,9082 \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad 2 \text{ decimales} \\ &= 1 - 0,9082 = 0,0918 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a2) \quad P(21 \leq X \leq 27) &= P\left(\frac{21-24}{3} \leq Z \leq \frac{27-24}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &\quad \nearrow \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ &\quad \text{Tipificamos} \quad \quad \text{Redondeo a} \quad \quad \text{Redondeo a} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad 2 \text{ decimales} \quad \quad 2 \text{ decimales} \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot \underbrace{0,8413}_{\text{Tabla } 0,8413} - 1 = 0,6826 \end{aligned}$$

b) Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella, hay 175 hembras.

1. Calcula un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94 %.
2. A la vista del resultado del muestreo, se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 2 %. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

b1) El estimador de la proporción es  $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{175}{500} = 0,35$  ;  $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,35 = 0,65$

$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2}$  Es la probabilidad que busco en la tabla.

Nivel de confianza  $p = 0,94 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,94 = 0,06$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,06}{2} = 1 - 0,03 = 0,97 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,03} = 1,885$   
media de 1,88 y 1,89

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para  $p$  y  $\hat{p}$  conocida es :  $\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\right)$

siendo el error  $E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1,885 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}} \simeq 0,04$  (2 decimales)

Tenemos una probabilidad del 94% de que la proporción de hembras (de toda la población) se halle dentro del intervalo:  $p \in (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$

$p \in (0,35 - 0,04, 0,35 + 0,04)$   $0,31 \leq p \leq 0,39$  , es decir entre el 31% y el 39%

$$b2) Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq E_{\max} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq \frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}} \Rightarrow \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n} \leq \left(\frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \leq n$$

$n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$  error máximo  $E = 2\% = 0,02$   
Mismo nivel de confianza.

$n \geq \left(\frac{1,885}{0,02}\right)^2 \cdot 0,35 \cdot 0,65 \simeq 2020,897$  , es decir,  $n \geq 2021$  peces.

Tamaño mínimo de la muestra:  $n = 2021$