

1. **ÁLGEBRA:** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores del parámetro k para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $k = 1$, calcula $(A - 3 \cdot I)^{-1}$.

c) Para $k = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X - B = 3 \cdot X$

2. **ÁLGEBRA:** Una empresa fabrica dos modelos de cajas de mascarillas, A y B , que dejan unos beneficios de 40 € y 20 € respectivamente. Para cada caja de mascarillas del modelo A se precisan 4 horas de trabajo y 3 unidades de tela. Para fabricar una caja del modelo B se requieren 3 horas de trabajo y 5 unidades de tela. La empresa dispone de un máximo de 48 horas de trabajo y 60 unidades de tela. Además, sólo pueden fabricarse como mucho 9 cajas de mascarillas del modelo A . ¿Cuántas cajas de mascarillas de cada modelo han de fabricarse para obtener el máximo beneficio? y ¿cuál sería este beneficio?

3. **ANÁLISIS:** El beneficio neto de una venta, en miles de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}, \text{ si } x > 0, \text{ siendo } x \text{ el número de unidades vendidas.}$$

a) Calcula el número de unidades que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determina dicho beneficio máximo. ¿Para qué valores de x tenemos beneficios, es decir, $B(x) > 0$?

b) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$.

4. **ANÁLISIS:** El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{donde } x \text{ representa el gasto en} \\ \text{publicidad, en miles de euros} \end{matrix}$$

a) Calcula el gasto en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo? Calcula el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas, es decir, $B(x) > 0$.

b) Calcula la primitiva de la función $f(x) = 5x^2 + 2x - 7$.

Determina la constante de integración de la primitiva $F(x)$ para que se cumpla que $F(1) = 0$.

5. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

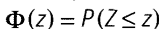
- a) La duración (en horas) de una mascarilla *FFP2* sigue una distribución normal de media $\mu = 4$ horas, y desviación $\sigma = 0,75$ horas. ¿Cuál es la probabilidad de que las mascarillas duren entre 3,25 y 4,25 horas?
- b) En un municipio los ingresos mensuales de sus habitantes sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 200 €. Se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultó ser de 1.060 €. Para un nivel de confianza del 95 %, calcula el intervalo de confianza para el ingreso medio mensual en ese municipio. Para un nivel de confianza del 99 %, calcula el mínimo tamaño de la muestra para estimar el ingreso mensual con un error menor de 30 €.

6. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

- a) Las máquinas *A* y *B* producen 50 y 250 piezas por hora respectivamente, con un porcentaje de fallos del 1 % en la máquina *A* y del 10 % en la *B*. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que esté fabricada en la máquina *A*, si sabemos que es defectuosa.
- b) En un país se selecciona aleatoriamente una muestra de 500 personas. A estas personas se les realiza un test *PCR* para detectar si están infectadas por el *COVID-19*. En el estudio, 60 personas dan positivo y el resto negativo. Determina un intervalo que nos dé la proporción de personas que dan positivo en el test *PCR* con un nivel de confianza del 90 %. Usa 3 decimales en los resultados. Con el mismo nivel de confianza, calcula el mínimo tamaño de la muestra para que el error máximo sea del 1,5 %.

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. **ÁLGEBRA:** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores del parámetro k para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $k = 1$, calcula $(A - 3 \cdot I)^{-1}$.

c) Para $k = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X - B = 3 \cdot X$

a) Para que la matriz A no tenga rango 3, $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & k \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ k & 3 \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & k \end{vmatrix} = -3(-6 + k) - k(3k)$$

$$18 - 3k - 3k^2 = 0 \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Si $k = 2$ o $k = -3$ la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula $(A - 3 \cdot I)^{-1}$ para $k = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$Z = A - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 = -3 \neq 0 \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(\bar{z})]^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{z}^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $\bar{z} \cdot \bar{z}^{-1} = I$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D

c) Para $k = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X - B = 3 \cdot X$

$$\begin{array}{l|l} A \cdot X - B = 3 \cdot X & (A - 3 \cdot I)^{-1} \cdot (A - 3 \cdot I)X = (A - 3 \cdot I)^{-1} \cdot B \\ A \cdot X - 3 \cdot X = B & \underbrace{\hspace{10em}}_I \\ (A - 3 \cdot I)X = B & X = (A - 3 \cdot I)^{-1} \cdot B \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

2. **ÁLGEBRA:** Una empresa fabrica dos modelos de cajas de mascarillas, A y B , que dejan unos beneficios de 40 € y 20 € respectivamente. Para cada caja de mascarillas del modelo A se precisan 4 horas de trabajo y 3 unidades de tela. Para fabricar una caja del modelo B se requieren 3 horas de trabajo y 5 unidades de tela. La empresa dispone de un máximo de 48 horas de trabajo y 60 unidades de tela. Además, sólo pueden fabricarse como mucho 9 cajas de mascarillas del modelo A . ¿Cuántas cajas de mascarillas de cada modelo han de fabricarse para obtener el máximo beneficio? y ¿cuál sería este beneficio?

Llamaremos $x \equiv \text{Mascarillas } A \text{ (40€)}$
 $y \equiv \text{Mascarillas } B \text{ (20€)}$

Mascarilla	Horas	u. Tela	Beneficio
A (x)	4	3	40€
B (y)	3	5	20€
Máximos	48	60	9 tipo A

Función objetivo $f(x, y) = \underbrace{40x}_A + \underbrace{20y}_B$

Restricciones

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot x + 3 \cdot y \leq 48 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y \leq 60 \\ x \leq 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \text{ (no negatividad)}$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 48$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=16 \Rightarrow (0,16) A$$

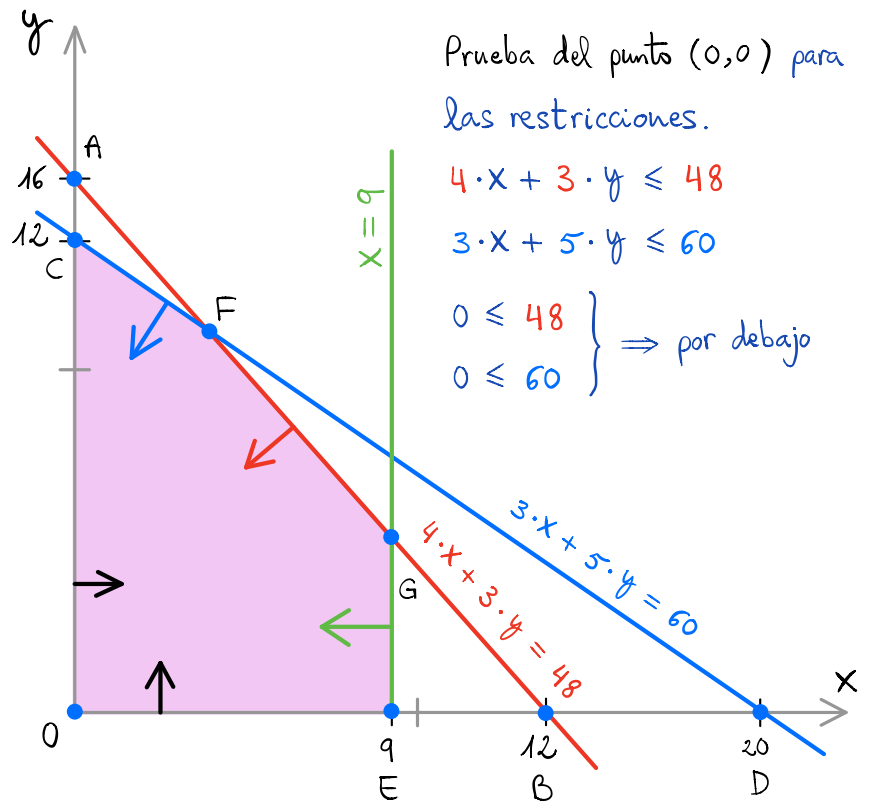
$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=12 \Rightarrow (12,0) B$$

$$3 \cdot x + 5 \cdot y = 60$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=12 \Rightarrow (0,12) C$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=20 \Rightarrow (20,0) D$$

$$x=9 \text{ Recta vertical } (9,0) E$$



Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot x + 3 \cdot y = 48 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y = 60 \end{array} \right\} \cdot 3 \Rightarrow 12x + 9y = 144$$

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 9y = 144 \\ 12x + 20y = 240 \end{array} \right\} - \Rightarrow 11y = 96 \Rightarrow y = \frac{96}{11}$$

$$x = \frac{60 - 5 \cdot \frac{96}{11}}{3} = \frac{60}{11} \Rightarrow \left(\frac{60}{11}, \frac{96}{11} \right) F$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot x + 3 \cdot y = 48 \\ x = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{48 - 4 \cdot 9}{3} = 4 \Rightarrow (9,4) G$$

La región factible es acotada entre los vértices: O, C, F, G y E .

La **función objetivo** es: $f(x,y) = 40x + 20y$ (máximo beneficio)

$$O \Rightarrow f(0,0) = 0 \text{€ (trivial)}$$

$$C \Rightarrow f(0,12) = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 12 = 240 \text{€}$$

$$F \Rightarrow f\left(\frac{60}{11}, \frac{96}{11}\right) = 40 \cdot \frac{60}{11} + 20 \cdot \frac{96}{11} \approx 392,7 \text{€}$$

$$\left. \begin{array}{l} G \Rightarrow f(9,4) = 40 \cdot 9 + 20 \cdot 4 = 440 \text{€} \\ E \Rightarrow f(9,0) = 40 \cdot 9 + 20 \cdot 0 = 360 \text{€} \end{array} \right\}$$

Obtengo el máximo beneficio fabricando 9 unidades del tipo A y 4 del tipo B con un beneficio de 440€.

3. **ANÁLISIS:** El beneficio neto de una venta, en miles de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}, \text{ si } x > 0, \text{ siendo } x \text{ el número de unidades vendidas.}$$

- a) Calcula el número de unidades que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determina dicho beneficio máximo. ¿Para qué valores de x tenemos beneficios, es decir, $B(x) > 0$?
- b) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$.

a) Estudiemos la **Monotonía** y el máximo absoluto del beneficio: **$B'(x) = 0$** , Condición de extremo

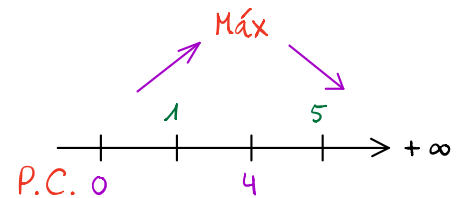
$$D B(x) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty) ; x = 0 \text{ es un P.C. (Punto Crítico)}$$

$$B'(x) = \frac{(-2x+9) \cdot x - (-x^2+9x-16) \cdot 1}{x^2} = \frac{-2x^2 + 9x + x^2 - 9x + 16}{x^2} = \frac{-x^2 + 16}{x^2}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 16}{x^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ (sólo es válido } x=4, x>0)$$

$x = 4$ es un posible extremo. Para caracterizar los extremos evaluo la 1ª derivada en puntos escogidos al azar dentro de cada intervalo para así conocer si la función crece o decrece.

$$\left. \begin{array}{l} B'(1) = \frac{-1+16}{1} > 0 \\ B'(5) = \frac{-25+16}{25} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4 \text{ máximo local}$$



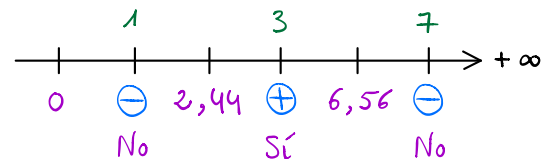
Veamos si es absoluto: $B(0) = -\infty$ (No tiene sentido; $x>0$); $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 9x - 16}{x} = -\infty$

Luego $x = 4$ Unidades es el máximo absoluto de ventas. $B(4) = \frac{-4^2 + 9 \cdot 4 - 16}{4} = 1 \Rightarrow 1000 \text{ € en ventas}$

Para qué valores $B(x) > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 9x - 16}{x} > 0$, factorizamos para encontrar los puntos de corte

$$x^2 - 9x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} < \begin{array}{l} 6,56 \\ 2,44 \end{array}$$

y evaluamos en puntos al azar:



x representa unidades luego, en enteros, tenemos beneficios (positivos) entre 3 (redondeamos por encima) y 6 unidades (redondeamos hacia abajo).

b) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$.

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$;

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0 \quad \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

Hay 2 intersecciones luego tenemos que calcular 1 área.

$$A = \int_0^3 |2x^2 - 6x| dx = \left| \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^3 \right| = \left| \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \text{Regla de Barrow}$$

$$A = \left(2 \cdot \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 \right) - 0 = 9 u^2$$

4. **ANÁLISIS:** El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{donde } x \text{ representa el gasto en} \\ \text{publicidad, en miles de euros} \end{matrix}$$

a) Calcula el gasto en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Calcula el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas, es decir, $B(x) > 0$.

b) Calcula la primitiva de la función $f(x) = 5x^2 + 2x - 7$.

Determina la constante de integración de la primitiva $F(x)$ para que se cumpla que $F(1) = 0$.

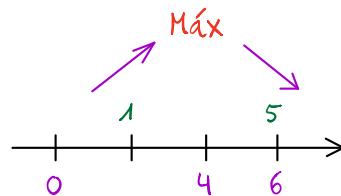
a) Estudiemos la Monotonía y el máximo absoluto del beneficio: $B'(x) = 0$, Condición de extremo

$$B(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow B'(x) = \begin{cases} -10x + 40 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5}{2} & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

Trozo 1 $B'(x) = -10x + 40 = 0 \Rightarrow x = 4$ es un posible extremo.

Para caracterizar los extremos evaluo la 1ª derivada en puntos escogidos al azar dentro de cada intervalo para así conocer si la función crece o decrece.

$$\left. \begin{array}{l} B'(1) = -10 + 40 > 0 \\ B'(5) = -50 + 40 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4 \text{ máximo local}$$



$$B(0) = -60 \text{ (beneficio negativo o pérdida)}$$

$$B(4) = -5 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 - 60 = 20$$

$$B(6) = -5 \cdot 6^2 + 40 \cdot 6 - 60 = 0$$

$x = 4$ es máximo en su intervalo con un gasto de 4.000 € en publicidad y 20.000 € de beneficio.

Veamos si es absoluto estudiando el 2º intervalo.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 6^-} -5x^2 + 40x - 60 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{5x}{2} - 15 = 0 \end{array} \right\} \text{ La función es continua en } x=6$$

Trozo 2 $B'(x) = \frac{5}{2} > 0$ es creciente en todo el intervalo.

$$B(6) = \frac{5 \cdot 6}{2} - 15 = 0, \quad B(10) = \frac{5 \cdot 10}{2} - 15 = 10 \Rightarrow x = 4 \text{ es máximo absoluto}$$

Para no tener pérdidas $B(x) > 0$; estudiamos sólo el trozo 1 (en el 2º es siempre positivo).

$B(x) = -5x^2 + 40x - 60 > 0$, factorizamos para encontrar los puntos de corte. Simplificamos $\div (-5)$:

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix}$$

y evaluamos en puntos al azar:

$$B(0) = -60 < 0$$

$$B(4) = 20 > 0$$

$$B(6) = 0$$

Tenemos un beneficio positivo entre 2 y 6 entre 2000 € y 6000 € de gasto de publicidad. Tampoco entre 6 y 10. 6000 € a 10.000 € de gasto.

$$x \in (2, 6) \cup (6, 10) \quad ; \text{ justo en } 6, B(6) = 0$$

b) Calcula la primitiva de la función $f(x) = 5x^2 + 2x - 7$.

Determina la constante de integración de la primitiva $F(x)$ para que se cumpla que $F(1) = 0$.

$$I = \int (5x^2 + 2x - 7) dx = 5 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 7x + C = 5 \frac{x^3}{3} + x^2 - 7x + C$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow 5 \frac{1^3}{3} + 1^2 - 7 \cdot 1 + C = 0 \Rightarrow C = 6 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

5. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

- a) La duración (en horas) de una mascarilla FFP2 sigue una distribución normal de media $\mu = 4$ horas, y desviación $\sigma = 0,75$ horas. ¿Cuál es la probabilidad de que las mascarillas duren entre 3,25 y 4,25 horas?

Llamamos X al tiempo. Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(4; 0,75)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(3,25 \leq X \leq 4,25) &= P\left(\frac{3,25 - 4}{0,75} \leq Z \leq \frac{4,25 - 4}{0,75}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0,33) = \\ &= P(Z \leq 0,33) - P(Z \leq -1) = \\ &= P(Z \leq 0,33) - [1 - P(Z \leq 1)] = 0,6293 - (1 - 0,8413) = 0,4706 \end{aligned}$$

Redondeo a 2 decimales

- b) En un municipio los ingresos mensuales de sus habitantes sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 200 €. Se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultó ser de 1.060 €. Para un nivel de confianza del 95 %, calcula el intervalo de confianza para el ingreso medio mensual en ese municipio. Para un nivel de confianza del 99 %, calcula el mínimo tamaño de la muestra para estimar el ingreso mensual con un error menor de 30 €.

$$n = 100, \quad \bar{X} = 1.060 \text{ €}, \quad \sigma = 200 \text{ €} \quad \boxed{1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+P}{2}} \quad \text{Es la probabilidad que busco en la tabla.}$$

$$\text{Nivel de confianza } p = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$$

$$\text{El intervalo de confianza para } \mu \text{ y } \sigma \text{ conocida es: } \left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\text{siendo el error } \boxed{E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1,96 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} = 39,2 \text{ €} \quad \boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Tenemos una probabilidad del 95% de que la media (de toda la población) de ingresos, se halla dentro del intervalo: $\mu \in (\bar{X} - E, \bar{X} + E)$

$$\mu \in (1.060 - 39,2, 1.060 + 39,2) \text{ €} \quad \boxed{1.020,8 \leq \mu \leq 1.099,2 \text{ €}}$$

Nivel de confianza $p = 0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,01}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,005}$$

Busco la probabilidad $0,995$ en la tabla y busco el valor Z más próximo y calculo la media

$$\text{de } 2,57 \text{ y } 2,58 \Rightarrow Z_{0,005} = 2,575$$

$$Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E \Rightarrow n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 \quad \text{error máximo } E = 30 \text{ €}$$

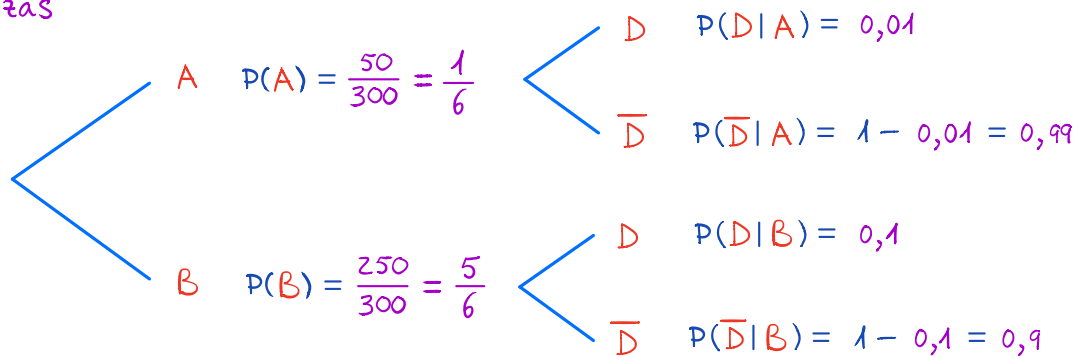
Tamaño mínimo: $n \geq \left(\frac{2,575 \cdot 200}{30} \right)^2 = 294,69$, es decir, $n \geq 295$ individuos.

6. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

- a) Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora respectivamente, con un porcentaje de fallos del 1 % en la máquina A y del 10 % en la B . Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que esté fabricada en la máquina A , si sabemos que es defectuosa.

$$50 + 250 = 300 \text{ piezas}$$

Construimos un diagrama en árbol:



Condición D . Calcula la probabilidad de A sabiendo D .

$$\text{Teorema de Bayes: } P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 0,01}{0,085} = \frac{1}{51} = 0,0196$$

Probabilidad total de que no sea defectuosa.

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B)$$

$$P(D) = \frac{1}{6} \cdot 0,01 + \frac{5}{6} \cdot 0,1 = \frac{17}{200} = 0,085$$

- b) En un país se selecciona aleatoriamente una muestra de 500 personas. A estas personas se les realiza un test *PCR* para detectar si están infectadas por el *COVID-19*. En el estudio, 60 personas dan positivo y el resto negativo. Determina un intervalo que nos dé la proporción de personas que dan positivo en el test *PCR* con un nivel de confianza del 90%. Usa 3 decimales en los resultados. Con el mismo nivel de confianza, calcula el mínimo tamaño de la muestra para que el error máximo sea del 1,5%.

El estimador de la proporción es $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{60}{500} = 0,12$; $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,88$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2}$$

Es la probabilidad que busco en la tabla.

Nivel de confianza $p = 0,9 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9 = 0,1$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,1}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,05} = 1,645$$

media de 1,64 y 1,65 ↗

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para p y $\hat{p}$ conocida es :

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

siendo el error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,12 \cdot 0,88}{500}} \approx 0,024$ (3 decimales)

Tenemos una probabilidad del 90% de que la proporción de positivos (de toda la población) se halla dentro del intervalo: $p \in (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$

$$p \in (0,12 - 0,024, 0,12 + 0,024)$$

$$0,096 \leq p \leq 0,144$$

, es decir entre el 9,6% y el 14,4%

$$Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq E \Rightarrow n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$$

error máximo $E = 1,5\% = 0,015$

Tamaño mínimo: $n \geq \left(\frac{1,645}{0,015} \right)^2 \cdot 0,12 \cdot 0,88 \approx 1270,027$, es decir, $n \geq 1271$ individuos.