

1. Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 euros y para no fumadores al precio de 60 euros. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene un máximo de 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3.000 kg, ¿cuál debe ser la oferta de plazas de la compañía para optimizar el beneficio?

2. Una enfermedad se propaga de tal manera que después de t semanas ha afectado a $N(t)$ cientos de personas donde:

$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2 \cdot (t - 6) & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4} \cdot (t - 10) & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $N(t)$. Calcula el máximo de personas infectadas y la semana en la que se presenta ese máximo.
 - b) ¿A partir de qué semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo?
 - c) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 11 - x$.
3. La duración (en años) de la placa base de los ordenadores sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 10$, $\sigma = 2$. Si compramos un lote de 1.000 placas base de ordenadores:
 - a) ¿Cuántas placas base durarán entre 7 y 11 años?
 - b) Si $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,52$, calcula la probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B .
 4. En un país se selecciona aleatoriamente una muestra de 900 personas. A la salida de los colegios electorales se les preguntó si habían votado al partido político X y 289 contestaron que sí y el resto que no.
 - a) Determina un intervalo que nos dé el porcentaje de votos del partido X con un nivel de confianza del 95 %, explicando los pasos realizados para su obtención.
 - b) Calcula el nivel de confianza en el que habría que construir el intervalo para que el máximo error sea del 4 %.

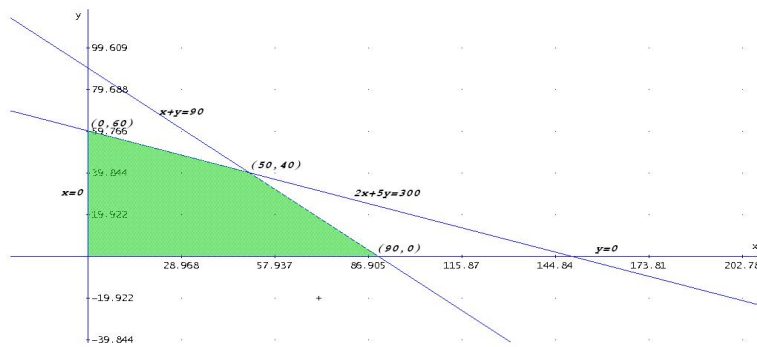
SOLUCIONARIO OPCIÓN B

1. Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 euros y para no fumadores al precio de 60 euros. Al no fumador se le deja llevar 50 *kg* de peso y al fumador 20 *kg*. Si el autobús tiene un máximo de 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3.000 *kg*, ¿cuál debe ser la oferta de plazas de la compañía para optimizar el beneficio?

Solución:

Ponemos x fumadores e y no fumadores. Tendremos las siguientes restricciones

$$\begin{cases} x + y \leq 90 \\ 20x + 50y \leq 3000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y \leq 90 \\ 2x + 5y \leq 300 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible será la zona sombreada La función objetivo $z(x,y) = 100x + 60y$

$$\begin{cases} z(0,60) &= 3600 \\ z(50,40) &= 7400 \\ z(90,0) &= 9000 \end{cases}$$

El beneficio máximo se producirá ofertando 90 plazas para los fumadores.

2. Una enfermedad se propaga de tal manera que después de t semanas ha afectado a $N(t)$ cientos de personas donde:

$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2 \cdot (t - 6) & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4} \cdot (t - 10) & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $N(t)$. Calcula el máximo de personas infectadas y la semana en la que se presenta ese máximo.
b) ¿A partir de qué semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo?
c) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 11 - x$.

a)

$$N'(t) = \begin{cases} -3t^2 + 12t & \text{para } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4} & \text{para } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$-3t^2 + 12t = 0 \implies t = 0, t = 4$$

	$[0, 4)$	$(4, 10]$
$N'(t)$	+	-
	creciente	decreciente

Luego en $t = 4$ la función presenta un máximo. Es decir, la enfermedad crece hasta la 4ª semana y después decrece hasta la 10ª semana. El máximo se alcanza con $N(4) = 37 \implies 3700$ enfermos.

b)

Nos piden un punto z que cumpla que $N(z) = 2,5$:

$$5 - z^2(z - 6) = 2,5 \implies z = 8; \quad -\frac{5}{4}(z - 10) = 2,5 \implies z = 8$$

A partir de la 8ª semana en número de enfermos es menor de 250.

En el primer tramo la función pasa de 5 a un máximo de 37 y acaba en 5, así que N nunca es menor de 2,5.

Sí ocurre en el 2º tramo en $t = 8$.

- c) Integral: puntos de corte en $x = -4$ y $x = 3$. $A = \frac{343}{6} \simeq 57,17 \text{ u}^2$

3. La duración (en años) de la placa base de los ordenadores sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 10, \sigma = 2$. Si compramos un lote de 1.000 placas base de ordenadores:

a) ¿Cuántas placas base durarán entre 7 y 11 años?

b) Si $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,52$, calcula la probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B .

$$\begin{aligned} a) P(7 \leq X \leq 11) &= P(X \leq 11) - P(X \leq 7) = P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -1,5) = \\ &= P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -1,5) = P(Z \leq 0,5) - [1 - P(Z < 1,5)] = \end{aligned}$$

$= 0,6915 - (1 - 0,9332) = 0,6247$, Solución: De las 1.000 placas, 625 durarán entre 7 y 11 años.

$$\begin{aligned} b) P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B). \text{ Como } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - [1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})] = 0,8 - (1 - 0,52) = 0,32 \end{aligned}$$

4. En un país se selecciona aleatoriamente una muestra de 900 personas. A la salida de los colegios electorales se les preguntó si habían votado al partido político X y 289 contestaron que sí y el resto que no.

a) Determina un intervalo que nos dé el porcentaje de votos del partido X con un nivel de confianza del 95 %, explicando los pasos realizados para su obtención.

b) Calcula el nivel de confianza en el que habría que construir el intervalo para que el máximo error sea del 4 %.

Solución:

Se trata de una normal con porcentajes

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

$$p = \frac{289}{900} = 0,32, \quad q = 0,68, \quad n = 900 \implies N(0,32, 0,0155)$$

El intervalo de confianza con $z_{\alpha/2} = 2,33$ será

$$\begin{aligned} &\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \\ &0,32 - 1,96 \sqrt{\frac{0,32 \cdot 0,68}{900}}, 0,32 + 1,96 \sqrt{\frac{0,32 \cdot 0,68}{900}} = \\ &(0,2896, 0,3504) \end{aligned}$$

Luego, el porcentaje de votos para el partido X estará en un intervalo (28.96%, 35.04%) con un nivel de confianza del 95%.

$$b) E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \text{ luego } Z_{\alpha/2} = \frac{E}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} = \frac{0,04}{\sqrt{\frac{0,32 \cdot 0,68}{900}}} \simeq 2,57 \quad \text{Solución 99 \%}$$