

(El alumno deberá responder sólo a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1: 3 puntos, ejercicio 2: 3 puntos, ejercicio 3: 2 puntos, ejercicio 4: 2 puntos)

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \lambda & -3 & 2 \end{pmatrix}$:

- Estudia el rango de la matriz A en función de los valores de λ .
- En el caso $\lambda = 0$ calcula $(A - I)^{-1}$. Donde I es la matriz identidad de orden 3.
- En el mismo caso $\lambda = 0$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - X = 10 \cdot I$

2. El precio en euros de un artículo para la pesca deportiva se estima por la función:

$$P(t) = 12 + \frac{36 \cdot t}{(t + 3)^2}, \quad t \geq 0, \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses desde que salió al mercado.}$$

- Calcula el precio inicial del producto y el precio máximo que alcanza. ¿En qué momento se produce ese precio máximo?
- Determina en qué mes o meses el precio alcanzó los 14,25 €. ¿Cuál es la tendencia del precio del artículo con el paso del tiempo? Justifica la respuesta.
- Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y $g(x) = 2x$.

3. En una determinada asignatura hay matriculados 2.500 alumnos. En Junio se presentaron 1.800 de los cuales aprobaron 1.015, mientras que en Septiembre, de los 700 que se presentaron, suspendieron 270. Elegido al azar un alumno matriculado en esa asignatura:

- Calcula la probabilidad de que haya aprobado.
- Si ha suspendido la asignatura, cuál es la probabilidad de haberse presentado en Septiembre.
- ¿Son independientes los sucesos suspender y presentarse en Junio?

4. En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros leen al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

- Halla un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.
- Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas sería necesario entrevistar como mínimo?

SOLUCIONARIO OPCIÓN A

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \lambda & -3 & 2 \end{pmatrix}$:

- a) Estudia el rango de la matriz A en función de los valores de λ .
- b) En el caso $\lambda = 0$ calcula $(A - I)^{-1}$. Donde I es la matriz identidad de orden 3.
- c) En el mismo caso $\lambda = 0$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - X = 10 \cdot I$

a) Si $\lambda = -2$ ó $\lambda = \frac{3}{2}$, $|A| = 0$ luego el rango $Rg(A) = 2$ porque hay un menor de orden 2 cuyo $\det \neq 0$. En los demás casos, $Rg(A) = 3$

$$b) (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{-2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

$$c) X = (A - I)^{-1} \cdot 10 \cdot I = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. El precio en euros de un artículo para la pesca deportiva se estima por la función:

$$P(t) = 12 + \frac{36 \cdot t}{(t + 3)^2}, \quad t \geq 0, \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses desde que salió al mercado.}$$

- a) Calcula el precio inicial del producto y el precio máximo que alcanza. ¿En qué momento se produce ese precio máximo?
- b) Determina en qué mes o meses el precio alcanzó los 14,25 €. ¿Cuál es la tendencia del precio del artículo con el paso del tiempo? Justifica la respuesta.
- c) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y $g(x) = 2x$.

a) $P(0) = 12\text{€}$, Máximo en $(3, 15)$, $P(t = 3) = 15\text{€}$

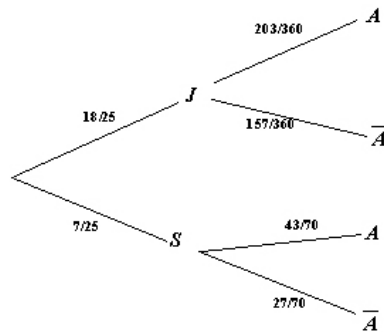
b) $P(t) = 14,25\text{€}$ en $t = 1$ y $t = 9$. A largo plazo $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[12 + \frac{36 \cdot t}{(t + 3)^2} \right] = 12\text{€}$

c) Integral: puntos de corte en $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = 2$. $A = \frac{131}{32} \simeq 4,09 \text{ u}^2$

3. En una determinada asignatura hay matriculados 2.500 alumnos. En Junio se presentaron 1.800 de los cuales aprobaron 1.015, mientras que en Septiembre, de los 700 que se presentaron, suspendieron 270. Elegido al azar un alumno matriculado en esa asignatura:

- Calcula la probabilidad de que haya aprobado.
- Si ha suspendido la asignatura, cuál es la probabilidad de haberse presentado en Septiembre.
- ¿Son independientes los sucesos suspender y presentarse en Junio?

Solución:



- c) Probabilidad de suspender en junio:

$$P(\bar{A} \cap J) = \frac{18}{25} \cdot \frac{157}{360} = 0,314$$

$$P(\bar{A}) \cdot P(J) = (1 - 0,578) \cdot \frac{18}{25} = 0,3038$$

$$P(\bar{A} \cap J) \neq P(\bar{A}) \cdot P(J)$$

No son independientes. Son dependientes.

$$1. P(A) = \frac{18}{25} \cdot \frac{203}{360} + \frac{7}{25} \cdot \frac{43}{70} = \frac{289}{500} = 0,578$$

$$2. P(S|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|S) \cdot P(S)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{43}{70} \cdot \frac{7}{25}}{1 - \frac{289}{500}} = \frac{54}{211} = 0,256$$

4. En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros leen al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

- Halla un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.
- Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas sería necesario entrevistar como mínimo?

Solución:

1.

$$1 - \alpha = 0,80 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,1 \Rightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,9 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28$$

$$I.C. = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$\left(5 - 1,28 \frac{2}{\sqrt{10.000}}; 5 + 1,28 \frac{2}{\sqrt{10.000}} \right) = (4,9744; 5,0256)$$

2.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,25 = 1,96 \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,25} \Rightarrow n = 245,8624$$

Luego $n = 246$.