

NOMBRE: _____

- 1) a) **(1.25 puntos)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.4$ y que $P(A \cup B) = 0.8$, determine $P(A/B)$.
b) **(1.25 puntos)** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.3$, que $P(D) = 0.8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cap D)$.
- 2) En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:
a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?
b) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.
- 3) **(2 puntos)** Dada la población , escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales. $\{10, 12, 17\}$
- 4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.
a) **(1.25 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.
b) **(1.25 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

SOLUCIONES

- 1) a) **(1.25 puntos)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.4$ y que $P(A \cup B) = 0.8$, determine $P(A/B)$. Según la fórmula que proporciona el axioma de la probabilidad condicionada:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pero desconocemos la probabilidad de la intersección. Usamos la fórmula que la relaciona con la de la unión, que sí tenemos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.8 = 0.1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

- b) **(1.25 puntos)** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.3$, que $P(D) = 0.8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.

Para utilizar la fórmula anterior, que liga unión e intersección de sucesos, precisamos conocer la probabilidad de la intersección. Como son independientes, según la fórmula de la probabilidad condicionada:

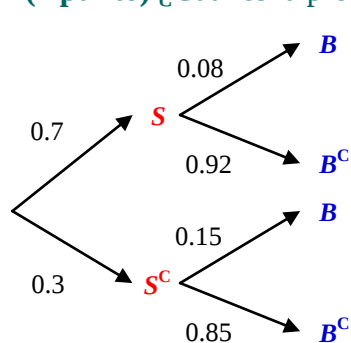
$$P(C \cap D) = P(C/D) P(D) = P(C) P(D) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$$

Por tanto:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0.3 + 0.8 - 0.24 = \boxed{0.86}$$

- 2) En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:

- a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?



Al tratarse de dos características que se miden consecutivamente, que son dependientes, creamos un árbol que esquematice el problema y nos ayude a solucionarlo. En cada rama, la probabilidad del suceso terminal de la misma condicionado al suceso de partida de dicha rama. De este modo, resulta el árbol adjunto.

En él, hemos llamado S = Ser español, y S^C = Ser extranjero, así como B = Tener beca y B^C = No estar becado.

La probabilidad de una intersección es el producto de las probabilidades de las ramas que hay que recorrer desde el inicio del árbol, a la izquierda, hasta el final que contiene los sucesos que queremos que sucedan a la vez:

$$P(S \cap B^C) = P(S) \cdot P(B^C/S) = 0.7 \cdot 0.92 = \boxed{0.644}$$

- b) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

Nos piden $P(S^C/B)$. Usamos la fórmula de Bayes, que no es más que aplicar la fórmula de la Probabilidad Condicionada, y teniendo en cuenta que la probabilidad, sin condicionar, de un suceso de la segunda característica del árbol (B ó

B^C) es, según el Teorema de la Probabilidad Total, la suma de los productos de todas las ramas que conducen desde el inicio del árbol hasta dicho suceso. Así:

$$P(S^C/B) = \frac{P(S^C \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot 0.15}{0.7 \cdot 0.08 + 0.3 \cdot 0.15} = \frac{45}{101} \approx \boxed{0.4455}$$

- 3) **(2 puntos)** Dada la población, escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales. {10, 12, 17}

Todas las muestras posibles de tamaño 2 extraídas mediante muestreo aleatorio simple, que se hace con reemplazamiento, son:

(10, 10) (10, 12) (10, 17) (12, 10) (12, 12) (12, 17) (17, 10) (17, 12) (17, 17)

Las medias de cada muestra son:

10 11 13.5 11 12 14.5 13.5 14.5 17

La media y la desviación típica de esta serie valen:

$$\bar{x} = \frac{10+11+\dots+17}{9} = \boxed{13} \quad s = \sqrt{\frac{10^2+11^2+\dots+17^2}{9} - \bar{x}^2} = \boxed{2.082}$$

- 4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.

- a) **(1.25 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.

Como la población de partida es Normal podemos crear el intervalo de confianza,

teniendo en cuenta que $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Así, como $\sigma = 0.2$, $\bar{x} = 0.3$, $n = 25$

$$\text{y } 1 - \alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.06}{2} = 0.97 \Rightarrow \text{Buscando este}$$

valor en el interior de las tablas de la $N(0;1)$: $z_{\alpha/2} = 1.88$, se tiene que el intervalo de confianza al 94% es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \boxed{(0.2248, 0.3752)}$$

- b) **(1.25 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.10}{2} = 0.95 \Rightarrow \text{Buscando este}$$

valor en el interior de las tablas de la $N(0;1)$: $z_{\alpha/2} = 1.645$.

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \text{ Queremos que } E < 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{0.05} < \sqrt{n}$$

$\Rightarrow$ (Elevando al cuadrado ambos miembros):

$$n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{0.05} \right)^2 = \left(\frac{1.645 \cdot 0.2}{0.05} \right)^2 = 43.2964 \Rightarrow \boxed{n = 44}$$

Como debe ser mayor que el dicho resultado para garantizar el nivel de error, tomamos el primer valor posible, pues el tamaño muestral no puede ser decimal.