

NOMBRE: \_\_\_\_\_

- 1) De dos sucesos aleatorios  $A$  y  $B$  del mismo espacio de sucesos se sabe que  $P(A) = \frac{2}{3}$ ,  $P(B) = \frac{3}{4}$  y  $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$ . Calcule:
- a) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
  - b) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
  - c) **(1 punto)** La probabilidad de que ocurra  $A$  si se ha verificado  $B$ .
- 2) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.
- a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?
  - b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?
  - c) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?
- 3) Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30. Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.
- a) **(0.75 puntos)** Escriba todas las muestras posibles.
  - b) **(1.25 puntos)** Calcule la media y varianza de las medias muestrales.
- 4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.
- a) **(1.5 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.
  - b) **(1.5 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

## SOLUCIONES

- 1) De dos sucesos aleatorios  $A$  y  $B$  del mismo espacio de sucesos se sabe que  $P(A) = \frac{2}{3}$ ,

$$P(B) = \frac{3}{4} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{5}{8}. \text{ Calcule:}$$

- a) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

Nos pide la probabilidad de  $A \cup B$  (es que se verifique un suceso o el otro, lo que incluye el que se verifiquen ambos). Por la fórmula general:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \boxed{\frac{19}{24}}$$

- b) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

El suceso a investigar es  $A^C \cap B^C$ , es decir, que no ocurra  $A$  y, a la vez, que no ocurra  $B$ . Según las Leyes de Morgan:  $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$ . Usando la probabilidad del suceso contrario:

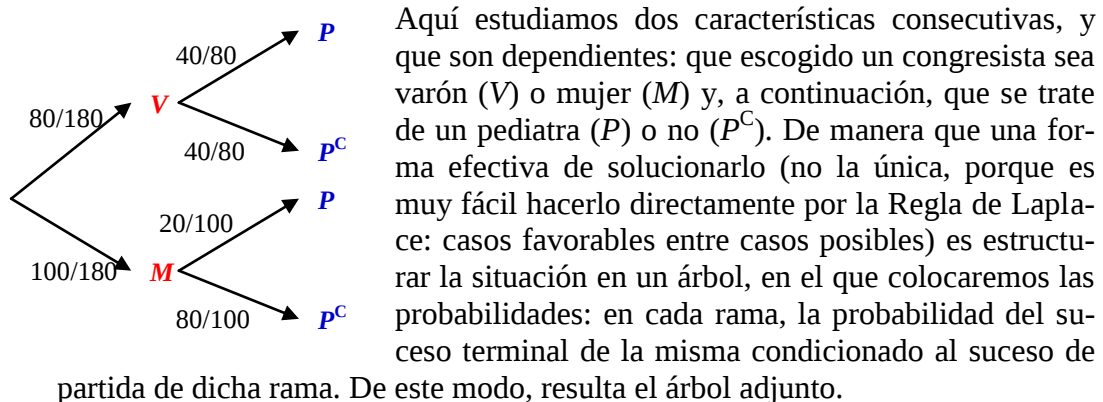
$$P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \boxed{\frac{5}{24}}$$

- c) **(1 punto)** La probabilidad de que ocurra  $A$  si se ha verificado  $B$ .

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 8} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

- 2) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.

- a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?



En su confección se ha tenido en cuenta que hay 80 varones y 100 mujeres de los 180 congresistas, y que hay 40 varones pediatras y 20 mujeres pediatras, por lo que el resto de varones y de mujeres no son pediatras.

La probabilidad de ser mujer y pediatra es  $P(M \cap P)$ . Las intersecciones en el árbol son el producto del recorrido de las ramas desde el inicio (a la izquierda) hasta el final (a la derecha). Por tanto:

$$P(M \cap P) = \frac{100}{180} \cdot \frac{20}{100} = \frac{20}{180} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

puesto que  $P(M \cap P) = P(M) \cdot P(P/M)$ , despejando en la fórmula que define el axioma de la *probabilidad condicionada*. Y esas probabilidades son las de las ramas descritas, según como hemos construido el árbol.

- b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?

$$P(V^C \cap P^C) = P(M \cap P^C) = \frac{100}{180} \cdot \frac{80}{100} = \frac{80}{180} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

Dentro del grupo de las mujeres, están las que son pediatras y las que no lo son. Por tanto, este suceso era el contrario del pedido en el apartado anterior. Por ello, sus probabilidades respectivas suman 1.

- c) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

Según el Teorema de la Probabilidad Total, la probabilidad de un suceso terminal en el árbol es la suma de los productos de todas las ramas que conducen a dicho suceso terminal:

$$P(P) = \frac{80}{180} \cdot \frac{40}{80} + \frac{100}{180} \cdot \frac{20}{100} = \frac{40}{180} + \frac{20}{180} = \frac{60}{180} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

- 3) Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30. Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.

- a) **(0.75 puntos)** Escriba todas las muestras posibles.

20, 20   20, 24   20, 30   24, 20   24, 24   24, 30   30, 20   30, 24   30, 30

- b) **(1.25 puntos)** Calcule la media y varianza de las medias muestrales.

Calculamos la media de cada muestra:

$$\bar{x} = \frac{20 + 22 + 25 + 22 + 24 + 27 + 25 + 27 + 30}{9} = \boxed{24.67}$$

$$s^2 = \frac{20^2 + 22^2 + 25^2 + 22^2 + 24^2 + 27^2 + 25^2 + 27^2 + 30^2}{9} - \bar{x}^2 = \boxed{8.44}$$

- 4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.

- a) **(1.5 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.

Podemos crear el intervalo de confianza porque la población de partida es normal. Por tanto, el intervalo de confianza será:

$$\left( \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde  $\sigma = 0.2$  (la desviación típica poblacional, conocida),  $n = 25$  (el tamaño de las muestras),  $\bar{x} = 0.3$  (la media de la muestra que usamos) y el nivel de confianza es  $1 - \alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06$  (nivel de significación). Por tanto:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.06}{2} = 0.97$$

De donde, al buscar en el interior de las tablas de la  $N(0;1)$  obtenemos que  $z_{\alpha/2} = 1.88$ . Sustituyendo, el intervalo de confianza pedido es:

$$(0.2248, 0.3752)$$

- b) **(1.5 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \text{ Queremos que } E < 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{0.05} < \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \text{(Elevando al cuadrado ambos miembros): } n > \left( \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{0.05} \right)^2$$

$$\text{Además: } 1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645.$$

$$n > \left( \frac{1.645 \cdot 0.2}{0.05} \right)^2 = 43.296. \text{ Por tanto, el mínimo valor de } n \text{ válido es } \boxed{n = 44}.$$