

ÁREAS, PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

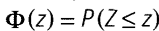
1. Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 - 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$, halla el área del recinto encerrado entre ambas. (1,5 pt)
2. En un determinado curso el 60 % de los estudiantes aprueba Economía y el 45 % aprueba Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar Economía sabiendo que se han aprobado las Matemáticas es 0,75.
 - a) Calcula el porcentaje de alumnos que aprueba las dos asignaturas. (0,75 pt.)
 - b) Entre los que aprueban economía ¿Qué porcentaje aprueba Matemáticas? (0,75 pt.)
 - c) Calcula la probabilidad de que un alumno no apruebe ninguna de las dos materias. (0,75 pt.)
 - d) ¿Son los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Economía independientes? (0,5 pt.)
3. Una máquina *A* fabrica 100 piezas al día, de las cuales un 6 % son defectuosas. Otra máquina *B* fabrica 50 piezas al día, con un porcentaje de defectuosas del 2 % . Mezclamos las piezas y seleccionamos una al azar.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza sea defectuosa? (1 pt)
 - b) Sabiendo que la pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina *B* ? (0,75 pt)
4. La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal con una desviación típica de 6 *cm* . Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos que da una media de 176 *cm* .
 - a) Obtén un intervalo con un 99 % de confianza para la media de la estatura de los individuos de la población. (1,25 pt)
 - b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de la población con un error inferior a 1 *cm* y un nivel de confianza del 93 % . (1,25 pt)
Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.
 - c) Sabiendo que la media poblacional $\mu = 175$ *cm*, ¿cuál es la probabilidad de que la estatura media en muestras de 64 individuos sea superior a 176 *cm* ? (1,5 pt)

COMPLEMENTARIO

- C) El ingreso a una Universidad se determina mediante una prueba. Las notas de esta prueba siguen una distribución normal de media 500 y una desviación típica de 100. Una alumna quiere ser admitida en esta universidad y sabe que debe obtener mejores calificaciones que al menos el 70 % de los estudiantes que pasaron la prueba (sólo entra el 30 %). Calcula la nota de corte para entrar en dicha Universidad. (1,5 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 - 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$,
halla el área del recinto encerrado entre ambas. (1,5 pt)

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 - 3x - 2 = x^2 - x - 2 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$2x(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \text{ Hay 2 intersecciones luego tenemos que calcular 1 área.}$$

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$; Nota: No se puede simplificar la expresión
 $f(x) - g(x) = 2x^2 + 2x$ para calcular el área:

$$A = \int_{-1}^0 |2x^2 + 2x| dx = \left| \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 \right| \text{ Regla de Barrow}$$

$$A = \left| \left(\frac{2 \cdot (0)^3}{3} + (0)^2 \right) - \left(\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 \right) \right| = \left| -\left(-\frac{2}{3} + 1 \right) \right| = \boxed{\frac{1}{3} u^2}$$

2. En un determinado curso el 60 % de los estudiantes aprueba Economía y el 45 % aprueba Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar Economía sabiendo que se han aprobado las Matemáticas es 0,75.

- a) Calcula el porcentaje de alumnos que aprueba las dos asignaturas. (0,75 pt.)
- b) Entre los que aprueban economía ¿Qué porcentaje aprueba Matemáticas? (0,75 pt.)
- c) Calcula la probabilidad de que un alumno no apruebe ninguna de las dos materias. (0,75 pt.)
- d) ¿Son los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Economía independientes? (0,5 pt.)

$E \equiv \text{Aprueba Economía}$; $M \equiv \text{Aprueba Matemáticas}$: $P(E) = 0,6$; $P(M) = 0,45$; $P(E|M) = 0,75$

a) Sabemos que $P(E|M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} \Rightarrow P(E \cap M) = P(M) \cdot P(E|M)$

$$P(E \cap M) = 0,45 \cdot 0,75 = 0,3375 \Rightarrow 33,75\%$$

b) $P(M|E) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{0,3375}{0,6} = 0,5625 \Rightarrow 56,25\%$

c) Por las leyes de Morgan $P(\bar{M} \cap \bar{E}) = P(\overline{M \cup E}) = 1 - P(M \cup E)$

$$P(\bar{M} \cap \bar{E}) = 1 - 0,7125 = 0,2875$$

$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0,45 + 0,6 - 0,3375 = 0,7125$$

d) ¿Son M y E independientes?

$$M \text{ y } E \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(M \cap E) = P(M) \cdot P(E) \quad P(M \cap E) = 0,3375$$

$$P(M) \cdot P(E) = 0,45 \cdot 0,6 = 0,27 \neq 0,3375 \text{ luego no son independientes. Son dependientes.}$$

Método II: $P(E|M) = 0,75 \neq P(E) = 0,6$

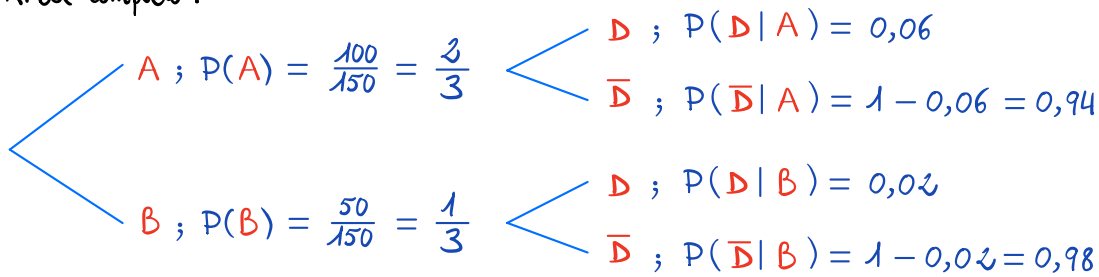
3. Una máquina A fabrica 100 piezas al día, de las cuales un 6 % son defectuosas. Otra máquina B fabrica 50 piezas al día, con un porcentaje de defectuosas del 2 % . Mezclamos las piezas y seleccionamos una al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza sea defectuosa? (1 pt)
 b) Sabiendo que la pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B ? (0,75 pt)

nº total de piezas : $100 + 50 = 150$ piezas

$D \equiv$ defectuosa

Árbol completo :



a) Probabilidad de que una pieza sea defectuosa . Probabilidad total :

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B)$$

$$P(D) = \frac{2}{3} \cdot 0,06 + \frac{1}{3} \cdot 0,02 = \frac{7}{150} = 0,0467$$

b) Teorema de Bayes: $P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D|B)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,02}{0,0467} = \frac{\frac{1}{75}}{0,0467} = \frac{1}{7} = 0,1428$

4. La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal con una desviación típica de 6 cm . Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos que da una media de 176 cm .

a) Obtén un intervalo con un 99 % de confianza para la media de la estatura de los individuos de la población. (1,25 pt)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de la población con un error inferior a 1 cm y un nivel de confianza del 93 % . (1,25 pt)

Justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas.

c) Sabiendo que la media poblacional $\mu = 175$ cm, ¿cuál es la probabilidad de que la estatura media en muestras de 64 individuos sea superior a 176 cm ? (1,5 pt)

a) $n = 225$, $\bar{x} = 176$ cm , $\sigma = 6$ cm $1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2}$ Es la probabilidad que busco en la tabla.

Nivel de confianza 99% $\Rightarrow p = 0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \Rightarrow$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,01}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$, $Z_{\alpha/2} = Z_{0,005}$ Busco la probabilidad 0,995 en la tabla y busco el valor Z más próximo y calculo la media de 2,57 y 2,58 $\Rightarrow Z_{0,005} = 2,575$

El intervalo de confianza para μ y σ conocida es : $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ I.C.

siendo el error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $= 2,575 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}} \simeq 1,03$ cm $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Tenemos una probabilidad del 99% de que la media (de toda la población) de estaturas , se halle dentro del intervalo : $\mu \in (\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$\mu \in (176 - 1,03 , 176 + 1,03)$ cm $174,97 \leq \mu \leq 177,03$ cm I.C.

$$b) \quad Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E_{\max} \Rightarrow \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \right)^2 \leq n \Rightarrow$$

$$\boxed{n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \right)^2} \quad \text{error máximo } E_{\max} = 1 \text{ cm}$$

Nuevo nivel de confianza 93%

$$\text{Nivel de confianza } 93\% \Rightarrow p = 0,93 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,93 = 0,07 \Rightarrow$$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,07}{2} = 1 - 0,035 = 0,965$, $Z_{\alpha/2} = Z_{0,035}$. Busco la probabilidad 0,965 en la tabla y busco el valor Z más próximo y calculo la media de 1,81 y 1,82 $\Rightarrow$

$$Z_{0,035} = \frac{1,81 + 1,82}{2} = 1,815 \Rightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,815 \cdot 6}{1} \right)^2 = 118,59, \text{ es decir, } n \geq 119 \text{ individuos.}$$

Tamaño mínimo de la muestra: $\boxed{n = 119}$

$$c) \quad \mu = 175 \text{ cm}, \sigma = 6 \text{ cm (no cambia)}; n = 64; \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(175, \frac{6}{\sqrt{64}}\right)$$

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} \sim N(0,1) \quad \text{Tipificación en una distribución muestral por la media}$$

$$P(\bar{X} > 176) = P\left(Z > \frac{176 - 175}{\frac{6}{\sqrt{64}}}\right) = P(Z > 1,33) =$$

Tipificamos Redondeo a 2 decimales

$$= 1 - P(Z \leq 1,33) = 1 - 0,9082 = \boxed{0,0918}$$

Tabla 0,9082

COMPLEMENTARIO

- C) El ingreso a una Universidad se determina mediante una prueba. Las notas de esta prueba siguen una distribución normal de media 500 y una desviación típica de 100. Una alumna quiere ser admitida en esta universidad y sabe que debe obtener mejores calificaciones que al menos el 70 % de los estudiantes que pasaron la prueba (sólo entra el 30 %). Calcula la nota de corte para entrar en dicha Universidad. (1,5 pt)

$$\mu = 500 \quad ; \quad \sigma = 100$$

$$X \sim N(\mu, \sigma) = N(500; 100) \quad ; \quad X \equiv \text{nota obtenida en la prueba.}$$

Tipificación $\rightarrow Z \sim N(0, 1)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

No conocemos la nota de corte a , pero sí que la probabilidad de aprobar (nota superior a a) es:

$$P(X \geq a) = 30\% = 0,3 \quad ; \quad \text{tipificamos la variable y la nota de corte.}$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 500}{100}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 500}{100}\right) = 0,3 \Rightarrow$$

$\uparrow$
TIPIFICACIÓN

$$P\left(Z \leq \frac{a - 500}{100}\right) = 1 - 0,3 = 0,7 \quad ; \quad \text{buscamos en la tabla el valor de } Z \text{ que}$$

corresponde a esta probabilidad. Como no aparece exactamente, buscamos las probabilidades inferior y superior a 0,7:

$$\left. \begin{array}{l} 0,6985 \Rightarrow Z = 0,52 \\ 0,7019 \Rightarrow Z = 0,53 \end{array} \right\} \text{Tomamos el valor medio} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{0,52 + 0,53}{2} = 0,525 \quad , \text{ de modo que , la nota de corte buscada cumple:}$$

$$\frac{a - 500}{100} = 0,525 \Rightarrow a = 100 \cdot 0,525 + 500 = 552,5$$

Solución: La nota de corte es $a = 552,5$