

PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

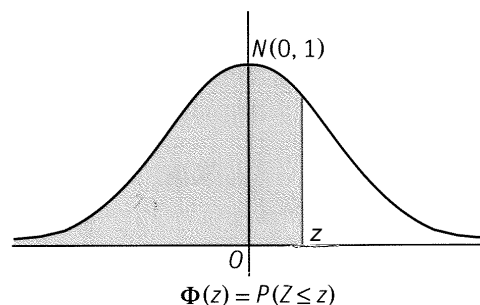
1. El 80 % de los alumnos de un colegio estudian inglés, y el 30 % , francés. Además, solo el 15 % combina ambos idiomas. Calcula las siguientes probabilidades:
 - a) Probabilidad de que un alumno estudie alguno de los dos idiomas. (0,5 pt.)
 - b) Si un alumno estudia francés, ¿cuál es la probabilidad de que estudie inglés? (0,75 pt.)
 - c) Probabilidad de que un alumno no estudie ninguno de esos idiomas. (0,75 pt.)
 - d) ¿Son los sucesos estudiar inglés y estudiar francés independientes? (0,5 pt.)
2. En el departamento textil de unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca *A*, 60 de la marca *B* y 40 de la marca *C*. La probabilidad de que una camiseta tenga una tara (defecto) es 0,01 para la marca *A*; 0,02 para la marca *B* y 0,03 para la marca *C*.
 - a) Dibuja un diagrama de árbol del problema con los datos. (0,5 pt)
Un comprador elige una camiseta al azar:
 - b) Calcula la probabilidad de que la camiseta tenga tara (sea defectuosa). (0,75 pt)
 - c) Sabiendo que la camiseta elegida no tiene tara (no es defectuosa), ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca *B* ? (0,75 pt)
 - d) Calcula la probabilidad de que una camiseta NO tenga tara y NO sea de la marca *A*. (1 pt)
3. En un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un producto sea defectuoso es 0,1. Si se seleccionan al azar 7 de estos productos, calcula la probabilidad de que:
 - a) Exactamente 3 sean defectuosos. (0,75 pt)
 - b) Al menos uno de ellos sea defectuoso. (1,25 pt)
4. Se sabe que el gasto mensual en gas y electricidad de las familias de una determinada región sigue una distribución normal de media 90 € y desviación típica 30 €.
Calcula las siguientes probabilidades expresando el resultado en porcentajes:
 - a) Probabilidad de que el gasto sea superior a 140 €. (1 pt)
 - b) Probabilidad de que el gasto esté comprendido entre 70 € y 100 €. (1,5 pt)

COMPLEMENTARIO

- C) Una universidad pública recibe 800 solicitudes de acceso para uno de los grados en los que la oferta de plazas se reduce a 120. Sabiendo que la nota final de un solicitante después de las pruebas de acceso sigue una distribución normal de media 7,3 y desviación típica 0,7, calcula la nota mínima (o nota de corte) necesaria para obtener una de las 120 plazas ofertadas. (1 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. El 80 % de los alumnos de un colegio estudian inglés, y el 30 % , francés. Además, solo el 15 % combina ambos idiomas. Calcula las siguientes probabilidades:

- a) Probabilidad de que un alumno estudie alguno de los dos idiomas. (0,5 pt.)
- b) Si un alumno estudia francés, ¿cuál es la probabilidad de que estudie inglés? (0,75 pt.)
- c) Probabilidad de que un alumno no estudie ninguno de esos idiomas. (0,75 pt.)
- d) ¿Son los sucesos estudiar inglés y estudiar francés independientes? (0,5 pt.)

$I \equiv \text{Estudia inglés}$; $F \equiv \text{Estudia francés}$: $P(I) = 0,8$; $P(F) = 0,3$; $P(I \cap F) = 0,15$

a) Sabemos que $P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F) = 0,8 + 0,3 - 0,15 = 0,95$

$$b) \quad P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

c) Por las leyes de Morgan $P(\bar{I} \cap \bar{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - P(I \cup F) \Rightarrow$
 $P(\bar{I} \cap \bar{F}) = 1 - 0,95 = 0,05$

d) ¿Son I y F independientes ?

$$I \text{ y } F \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(I \cap F) = P(I) \cdot P(F) \quad P(I \cap F) = 0,15$$

$P(I) \cdot P(F) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24 \neq 0,15$ luego no son independientes. Son dependientes.

Método II: $P(I|F) = 0,5 \neq P(I) = 0,8$

Método de la tabla de contingencia:

Consideramos a 100 alumnos.

Rellenamos la tabla con los datos y calculamos el resto de celdas. Con toda esta información calculamos las probabilidades.

	I	$\bar{I}$	
F	15		30
$\bar{F}$			
	80		100

 $\Rightarrow$

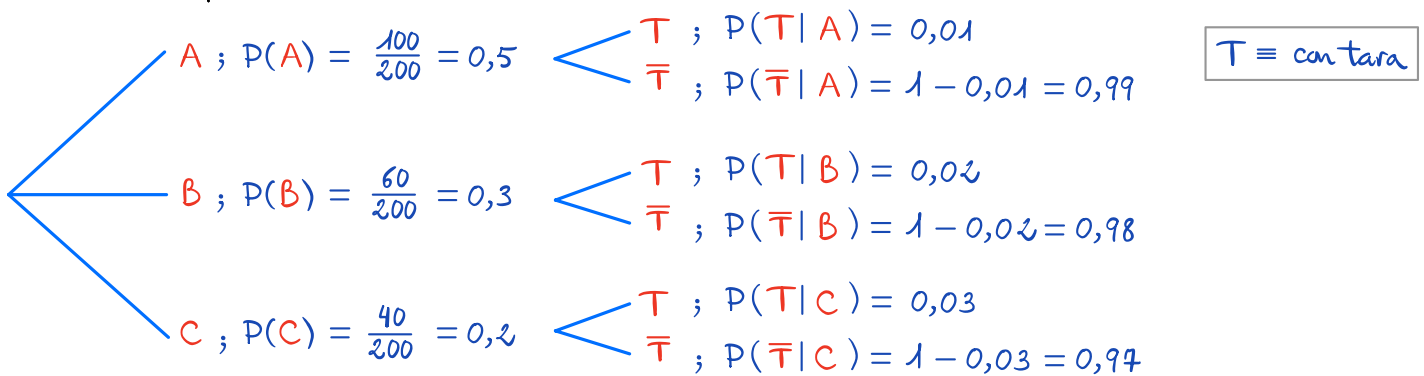
	I	$\bar{I}$	
F	15	15	30
$\bar{F}$	65	5	70
	80	20	100

2. En el departamento textil de unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A , 60 de la marca B y 40 de la marca C . La probabilidad de que una camiseta tenga una tara (defecto) es 0,01 para la marca A ; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C .

- a) Dibuja un diagrama de árbol del problema con los datos. (0,5 pt)
Un comprador elige una camiseta al azar:
- b) Calcula la probabilidad de que la camiseta tenga tara (sea defectuosa). (0,75 pt)
- c) Sabiendo que la camiseta elegida no tiene tara (no es defectuosa), ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B ? (0,75 pt)
- d) Calcula la probabilidad de que una camiseta NO tenga tara y NO sea de la marca A . (1 pt)

$$n^{\circ} \text{ total de camisetas: } 100 + 60 + 40 = 200$$

a) Árbol completo:



- b) Probabilidad de que una camiseta tenga tara. Probabilidad total:

$$P(T) = P(A) \cdot P(T|A) + P(B) \cdot P(T|B) + P(C) \cdot P(T|C)$$

$$P(T) = 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,017$$

c) Teorema de Bayes: $P(B|\bar{T}) = \frac{P(B \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(B) \cdot P(\bar{T}|B)}{1 - P(T)} = \frac{0,3 \cdot 0,98}{1 - 0,017} = 0,2991$

d) Leyes de Morgan. $P(\bar{T} \cap \bar{A}) = P(\overline{T \cup A}) = 1 - P(T \cup A) = 1 - 0,512 = 0,488$

$$P(T \cup A) = P(T) + P(A) - P(T \cap A) = P(T) + P(A) - P(A) \cdot P(T|A)$$

$$P(T \cup A) = 0,017 + 0,5 - 0,5 \cdot 0,01 = 0,512$$

Método II: $P(B \cap \bar{T}) + P(C \cap \bar{T}) = 0,3 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,97 = 0,488$

Regla del producto

3. En un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un producto sea defectuoso es 0,1. Si se seleccionan al azar 7 de estos productos, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 3 sean defectuosos.

(0,75 pt)

b) Al menos uno de ellos sea defectuoso.

(1,25 pt)

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	Distribución binomial Combinaciones · (prob. éxito)^{nº éxitos} · (prob. fracaso)^{nº fracasos}
-------------------------------------	---

Se trata de un experimento binomial con $p = 0,1$ (llamamos éxito a que sea defectuoso).

$B(n=7, p=0,1)$, $q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9$; $X \equiv \{ \text{Suceso nº productos defectuosos} \}$

$k = \text{nº éxitos}$. Nos preguntan:

$$a) P(X=3) = \binom{7}{3} \cdot (0,1)^3 \cdot (0,9)^{7-3} = \frac{7!}{3!4!} \cdot (0,1)^3 \cdot (0,9)^4$$

$$P(X=3) = 35 \cdot (0,1)^3 \cdot (0,9)^4 = 0,0230$$

$$b) P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - [P(X=0)]$$

$$P(X=0) = \binom{7}{0} \cdot (0,1)^0 \cdot (0,9)^{7-0} = \frac{7!}{0!7!} \cdot (0,1)^0 \cdot (0,9)^7$$

$$P(X=0) = 1 \cdot (0,1)^0 \cdot (0,9)^7 = 0,4783$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,4783 = 0,5217$$

4. Se sabe que el gasto mensual en gas y electricidad de las familias de una determinada región sigue una distribución normal de media 90 € y desviación típica 30 €.

Calcula las siguientes probabilidades expresando el resultado en porcentajes:

- a) Probabilidad de que el gasto sea superior a 140 €. (1 pt)
b) Probabilidad de que el gasto esté comprendido entre 70 € y 100 €. (1,5 pt)

Llamamos $X \equiv \{ \text{Gasto en } \text{€} \}$, $\mu = 90 \text{ €}$, $\sigma = 30 \text{ €}$

Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(90, 30)$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$\text{a) } P(X > 140) = P\left(Z > \frac{140 - 90}{30}\right) = P\left(Z > \underbrace{1,666\dots}_{\substack{\text{Redondeo a} \\ \text{2 decimales}}}\right) = P(Z > 1,67)$$

Tipificamos

$$= 1 - P\left(Z \leq \underbrace{1,67}_{\substack{\text{Tabla} \\ \text{0,9525}}}\right) = 1 - 0,9525 = 0,0475$$

$$\text{b) } P(70 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{70 - 90}{30} \leq Z \leq \frac{100 - 90}{30}\right) = P\left(\underbrace{-0,666}_{\substack{\text{Redondeo a} \\ \text{2 decimales}}} \leq Z \leq \underbrace{0,333}_{\substack{\text{Redondeo a} \\ \text{2 decimales}}}\right) =$$

Tipificamos

$$\begin{aligned} &= P(Z \leq 0,33) - P(Z \leq -0,67) = P(Z \leq 0,33) - [1 - P(Z \leq 0,67)] = \\ &\quad \underbrace{\text{Tabla } 0,6293} \quad \underbrace{\text{Tabla } 0,7486} \\ &= 0,6293 - 1 + 0,7486 = 0,3779 \end{aligned}$$

COMPLEMENTARIO

- C) Una universidad pública recibe 800 solicitudes de acceso para uno de los grados en los que la oferta de plazas se reduce a 120. Sabiendo que la nota final de un solicitante después de las pruebas de acceso sigue una distribución normal de media 7,3 y desviación típica 0,7, calcula la nota mínima (o nota de corte) necesaria para obtener una de las 120 plazas ofertadas. (1 pt)

$$\mu = 7,3 \quad ; \quad \sigma = 0,7$$

$$X \sim N(\mu, \sigma) = N(7,3 ; 0,7) \quad ; \quad X \equiv \text{nota obtenida en el examen.}$$

Tipificación $\rightarrow Z \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

No conocemos la nota de corte a , pero sí que la probabilidad de aprobar (nota superior a a) es:

$$P(X \geq a) = \frac{120}{800} = 0,15 \quad ; \quad \text{tipificamos la variable y la nota de corte.}$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 7,3}{0,7}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 7,3}{0,7}\right) = 0,15 \Rightarrow$$

↑
Tipificación

$$P\left(Z \leq \frac{a - 7,3}{0,7}\right) = 1 - 0,15 = 0,85 \quad ; \quad \text{buscamos en la tabla el valor de } Z \text{ que}$$

corresponde a esta probabilidad. Como no aparece exactamente, buscamos las probabilidades inferior y superior a 0,85:

$$\left. \begin{array}{l} 0,8485 \Rightarrow Z = 1,03 \\ 0,8508 \Rightarrow Z = 1,04 \end{array} \right\} \text{Tomamos el valor medio} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{1,03 + 1,04}{2} = 1,035 \quad , \text{ de modo que , la nota de corte buscada cumple:}$$

$$\frac{a - 7,3}{0,7} = 1,035 \Rightarrow a = 0,7 \cdot 1,035 + 7,3 = 8,02$$

Solución: La nota de corte es $a = 8,02$