

CONTROL DE PROBABILIDAD (APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL POR LA NORMAL) Y ESTADÍSTICA (DISTRIBUCIONES MUESTRALES)

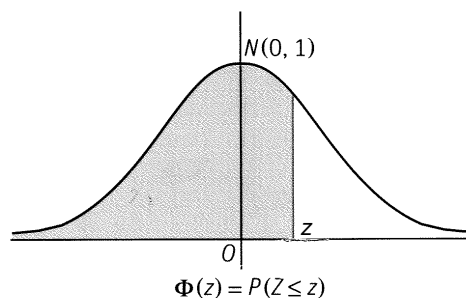
1. Un instituto afirma que el 65 % de sus alumnos de 2º de Bachillerato aprueban todas las asignaturas en la primera convocatoria de junio. Para comprobarlo, se elige una muestra aleatoria de 150 alumnos de ese curso.
 - a) Calcula la probabilidad de que más de 90 alumnos aprueben todo en junio. (1,5 pt.)
 - b) Calcula la probabilidad de que aprueben todo en junio entre 95 y 105 alumnos. (1 pt.)

2. Una empresa fabrica bombillas cuya duración sigue una distribución normal con media poblacional desconocida y desviación típica $\sigma = 120$ horas. Se toma una muestra aleatoria de 64 bombillas y se obtiene un intervalo de confianza para la duración media de las bombillas de $[1.180 , 1.220]$ horas.
 - a) Calcula la media muestral, el error cometido y el nivel de confianza del intervalo dado. (1,5 pt)
 - b) Determina el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 97 % , el error máximo no supere las 15 horas. (1 pt)
 - c) Sabiendo que la media poblacional es $\mu = 1200$ horas, calcula la probabilidad de que, en una muestra de 16 bombillas, la duración media sea superior a 1.250 horas? (1,25 pt)

3. Un equipo de investigación médica está estudiando la efectividad de una nueva vacuna contra la gripe. Según estudios preliminares, se estima que el 65 % de los pacientes desarrollan inmunidad después de recibirla. Para verificar esta afirmación, se seleccionó aleatoriamente una muestra de 150 pacientes que recibieron la vacuna, y se encontró que 90 de ellos desarrollaron inmunidad.
 - a) Obtén un intervalo con un 90 % de confianza para la proporción de pacientes que desarrollan la inmunidad. (1,5 pt)
 - b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 95 % , el error no supere el 4 % . (1 pt)
 - c) Supongamos que desconocemos la proporción de la población. Utilizando la hipótesis de máxima indeterminación , calcula la probabilidad de que, en otra muestra de 150 pacientes, la proporción muestral de pacientes que desarrollan la inmunidad sea mayor que el 60 % ? (1,25 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Un instituto afirma que el 65 % de sus alumnos de 2º de Bachillerato aprueban todas las asignaturas en la primera convocatoria de junio. Para comprobarlo, se elige una muestra aleatoria de 150 alumnos de ese curso.

- a) Calcula la probabilidad de que más de 90 alumnos aprueben todo en junio. (1,5 pt.)
 b) Calcula la probabilidad de que aprueben todo en junio entre 95 y 105 alumnos. (1 pt.)

$Y =$ "número de alumnos que aprueban", $n = 150$ alumnos

$p = 65\% = 0,65$ Probabilidad de éxito (aprueba). $q = 1 - 0,65 = 0,35$ Probabilidad de fracaso.

Se trata de una distribución binomial $B(n, p) = B(150; 0,65)$

a) Nos preguntan la probabilidad $P(Y > 90)$, Resultaría larguísimo el cálculo.

Como n es grande, deben cumplirse las condiciones: $n \cdot p \geq 5$ $n \cdot q \geq 5$ Condiciones de Moivre

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 150 \cdot 0,65 = 97,5 \geq 5 \\ n \cdot q = 150 \cdot 0,35 = 52,5 \geq 5 \end{array} \right\} \text{ se puede aproximar con una distribución normal:}$$

$$\mu = n p = 97,5 \text{ (media)}$$

$$\sigma = \sqrt{n p q} = \sqrt{150 \cdot 0,65 \cdot 0,35} \approx 5,84 \text{ (desviación típica)}$$

$$B(n, p) \sim N(\mu, \sigma) = N(n p, \sqrt{n p q}) = N(97,5; 5,84)$$

$Y \approx X \sim N(\mu, \sigma)$, X es la variable de la distribución normal con la corrección de Yates.

$$P(Y > 90) \approx P(X > 90 + 0,5) = P(X > 90,5) = P\left(Z > \frac{90,5 - 97,5}{5,84}\right) =$$



TIPIFICACIÓN $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

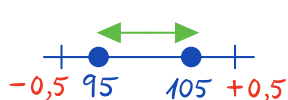
$$\approx P(Z \geq -1,20) = P(Z \leq 1,20) = 0,8849$$

Tenemos un 88,49 % de probabilidades.

REDONDEO A 2 DÉCIMAS

Tabla 0,8849

$$b) P(95 \leq Y \leq 105) = P(94,5 \leq X \leq 105,5) = P\left(\frac{94,5 - 97,5}{5,84} \leq Z \leq \frac{105,5 - 97,5}{5,84}\right) =$$



TIPIFICACIÓN $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$$= P(-0,51 \leq Z \leq 1,37) = P(Z \leq 1,37) - P(Z \leq -0,51) =$$

Redondeo a 2 decimales

Redondeo a 2 decimales

$$= P(Z \leq 1,37) - [1 - P(Z \leq 0,51)] = 0,9147 - 1 + 0,6950 = 0,6097$$

Tabla 0,9147 Tabla 0,6950

2. Una empresa fabrica bombillas cuya duración sigue una distribución normal con media poblacional desconocida y desviación típica $\sigma = 120$ horas. Se toma una muestra aleatoria de 64 bombillas y se obtiene un intervalo de confianza para la duración media de las bombillas de $[1.180, 1.220]$ horas.
- Calcula la media muestral, el error cometido y el nivel de confianza del intervalo dado. (1,5 pt)
 - Determina el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 97 %, el error máximo no supere las 15 horas. (1 pt)
 - Sabiendo que la media poblacional es $\mu = 1200$ horas, calcula la probabilidad de que, en una muestra de 16 bombillas, la duración media sea superior a 1.250 horas? (1,25 pt)

a) $n = 64$, $\sigma = 120$ h : I.C. $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Tenemos una probabilidad de que la media de la duración (de toda la población) se halle dentro del intervalo: $\mu \in (\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (1180, 1220)$

$$1180 \leq \mu \leq 1220 \Rightarrow \text{Longitud o Amplitud} = 1220 - 1180 = 40 = 2 \cdot E \text{ (no piden este dato)}$$

$$\bar{x} = \frac{\text{Extremo izquierdo} + \text{Extremo derecho}}{2} = \frac{1180 + 1220}{2} = 1200 \text{ h}$$

$$E = \frac{\text{Extremo derecho} - \text{Extremo izquierdo}}{2} = \frac{1220 - 1180}{2} = 20 \text{ h}$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 20 \cdot \frac{\sqrt{64}}{120} = \frac{160}{120} = 1,33$ (valor crítico) ↗ redondeo 2 decimales

$Z_{\alpha/2} = 1,33$ Busco la probabilidad de 1,33 en la tabla $\Rightarrow 0,9082$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9082 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9082 = 0,0918 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,0918 = 0,1836 \text{ (Nivel de significación)}$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0,1836 = 0,8164 \Rightarrow 81,64 \% \text{ (Nivel de confianza)}$$

La media muestral $\bar{x} = 1200$ h

b) Error máximo $E_{\max} = 15$ h ; Nivel de confianza del 97%

Nivel de confianza $p = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \Rightarrow$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,03}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,015} = 2,17$$

Tabla ↗ ↘ valor exacto

$$Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E_{\max} \Rightarrow \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \right)^2 \leq n \Rightarrow n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_{\max}} \right)^2$$

$$n \geq \left(\frac{2,17 \cdot 120}{15} \right)^2 = 301,37, \text{ es decir, } n \geq 302 \text{ bombillas}$$

Tamaño mínimo de la muestra: $n = 302$

c) $\mu = 1200 \text{ h}$; $n = 16$; $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1200, \frac{120}{\sqrt{16}}\right) = N(1200, 30)$
 $\sigma = 120 \text{ h}$ (no cambia)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Tipificación en una distribución muestral por la media

$$P(\bar{X} > 1250) = P\left(Z > \frac{1250 - 1200}{\frac{120}{\sqrt{16}}}\right) = P(Z > \underbrace{1,67}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}) =$$

Tipificamos

$$= 1 - P(Z \leq \underbrace{1,67}_{\text{Tabla } 0,9525}) = 1 - 0,9525 = \boxed{0,0475}$$

3. Un equipo de investigación médica está estudiando la efectividad de una nueva vacuna contra la gripe. Según estudios preliminares, se estima que el 65 % de los pacientes desarrollan inmunidad después de recibirla. Para verificar esta afirmación, se seleccionó aleatoriamente una muestra de 150 pacientes que recibieron la vacuna, y se encontró que 90 de ellos desarrollaron inmunidad.
- Obtén un intervalo con un 90 % de confianza para la proporción de pacientes que desarrollan la inmunidad. (1,5 pt)
 - Calcula el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error no supere el 4 %. (1 pt)
 - Supongamos que desconocemos la proporción de la población. Utilizando la hipótesis de máxima indeterminación, calcula la probabilidad de que, en otra muestra de 150 pacientes, la proporción muestral de pacientes que desarrollan la inmunidad sea mayor que el 60 % ? (1,25 pt)

a) El estimador de la proporción es $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{90}{150} = 0,6$; $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,6 = 0,4$

No usamos el 65 % sino los datos del estudio: $\hat{p} = 0,6$ $1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2}$ Es la probabilidad que busco en la tabla.

Nivel de confianza $p = 0,9 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9 = 0,1 \Rightarrow$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,1}{2} = 1 - 0,05 = 0,95$, $Z_{\alpha/2} = Z_{0,05}$ Busco la probabilidad $0,95$ en la tabla ↗ Tabla
y busco el valor Z más próximo y calculo la media de $1,64$ y $1,65 \Rightarrow Z_{0,05} = 1,645$

El intervalo de confianza para p y $\hat{p}$ conocida es :

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} , \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right) \quad \hat{p} \sim N \left(p , \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right)$$

siendo el error $E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$ $= 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{150}} \approx 0,066$ (3 decimales) 6,6 %

Tenemos una probabilidad del 90 % de que la proporción de pacientes inmunes (de toda la población) se halle dentro del intervalo: $p \in (\hat{p} - E , \hat{p} + E)$ siendo el error = 0,066 = 6,6 %

$$p \in (0,6 - 0,066 , 0,6 + 0,066) \Rightarrow p \in (0,534 , 0,666) = (53,4\% , 66,6\%)$$

es el intervalo de confianza I.C. para la proporción de pacientes inmunes con un nivel de confianza del 90 % $\Rightarrow$ la probabilidad $P(0,534 \leq p \leq 0,666) = 0,9$

b) Error máximo $E = 4\% = 0,04$; Nivel de confianza del 95 %

$$p = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow$$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$, $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025}$ Busco la probabilidad 0,975 en la tabla ↖ Tabla
y busco el valor Z más próximo: 1,96 $\Rightarrow Z_{0,025} = 1,96$
valor exacto ↗

$$Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq E_{\max} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq \frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}} \Rightarrow \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n} \leq \left(\frac{E_{\max}}{Z_{\alpha/2}} \right)^2 \Rightarrow \hat{p} \cdot \hat{q} \cdot \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}} \right)^2 \leq n$$

$$n \geq \hat{p} \cdot \hat{q} \cdot \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E_{\max}} \right)^2 \Rightarrow n \geq 0,6 \cdot 0,4 \cdot \left(\frac{1,96}{0,04} \right)^2 \approx 576,24 \text{ , es decir, } n \geq 577 \text{ pacientes.}$$

Tamaño mínimo de la muestra : $n = 577$

c) $n = 150$; Hipótesis de máxima indeterminación $p = 1 - p = q = \frac{1}{2} = 0,5$;

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = N\left(0,5, \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{150}}\right) = N(0,5 ; 0,041)$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}} \sim N(0,1)$$

Tipificación en una distribución muestral por la proporción

$$P(\hat{p} > 60\%) = P(\hat{p} > 0,6) = P\left(Z > \frac{0,6 - 0,5}{0,041}\right) = P(Z > \underline{2,44}) =$$

Tipificamos Redondeo a 2 decimales

$$= 1 - P(Z \leq \underline{2,44}) = 1 - 0,9927 = \boxed{0,0073} = \boxed{0,73\%}$$

Tabla 0,9927

Es, lógicamente, una probabilidad muy baja.