

ANÁLISIS

1. Teorema de *Rolle*:

- a) Enuncia el teorema de *Rolle* y su interpretación geométrica. (1 pt)
- b) Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de *Rolle* a la función $f(x) = -x^3 + ax - 1$, en el intervalo $[0,1]$. (0,5 pt)
- c) Para el valor $a = 1$, calcula un punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ sea horizontal, es decir, paralela al eje OX . (0,5 pt)

2. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$ (1 pt)

3. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2}{3 - 2x}$:

- a) Calcula los intervalos de monotonía. (1,5 pt)
- b) Encuentra y clasifica los extremos relativos y calcula sus coordenadas. (0,5 pt)

4. Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$:

- a) Calcula los intervalos de curvatura. (1,5 pt)
- b) Calcula los puntos de inflexión y sus coordenadas en todo $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

5. Queremos diseñar una caja de cartón de base cuadrada y sin tapa de modo que contenga un volumen de 2 m^3 . Calcula las dimensiones (x = lado de la base, h = altura-caja) para que la superficie de la caja sea mínima. Comprueba que, efectivamente, esa superficie es mínima y calcúlala. (2 pt)

6. Calcula por partes la siguiente integral indefinida: $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$ (1 pt)

1. Teorema de Rolle:

- a) Enuncia el teorema de Rolle y su interpretación geométrica. (1 pt)
- b) Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = -x^3 + ax - 1$, en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 pt)
- c) Para el valor $a = 1$, calcula un punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ sea horizontal, es decir, paralela al eje OX . (0,5 pt)

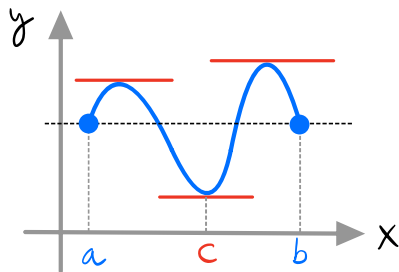
a) Teorema de Rolle

$f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ función continua en el intervalo cerrado.

$f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ función derivable en el intervalo abierto.

$f(a) = f(b)$ la función tiene la misma imagen en los bordes del intervalo.

Con estas condiciones $\Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$, es decir,



la recta tangente a $f(x)$ en $x = c$ es horizontal (su pendiente es nula).

El teorema garantiza que esto ocurra al menos una vez, pero puede darse varias veces.

- b) $f(x) = -x^3 + ax - 1$ en $[0, 1]$; calculamos a para que sea aplicable el teorema.

En nuestro caso: $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ por ser polinómica.

$f'(x) = -3x^2 + a$ es derivable en $(0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = -1 + a - 1 \end{array} \right\} f(0) = f(1) \Rightarrow -1 = -1 + a - 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

- c) Para $a = 1 \Rightarrow f(x) = -x^3 + x - 1$

Una recta con la tangente horizontal $\Rightarrow f'(c) = 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 1 \Rightarrow f'(c) = -3c^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ pero sólo } \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{3}}} \in (0, 1)$$

2. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x}{0 - (-\sin x)} =$

Aplicamos L'Hôpital-Bernoulli $\frac{0}{0}$ IND

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1 \cdot \cos x - x \cdot \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos x - x \cdot \sin x}{\cos x} = \boxed{2}$

Aplicamos L'Hôpital-Bernoulli $\frac{0}{0}$ IND

3. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2}{3-2x}$:

a) Calcula los intervalos de monotonía.

b) Encuentra y clasifica los extremos relativos y calcula sus coordenadas.

$y = \frac{2x^2}{3-2x}$, $3-2x=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $Df(x) = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$, luego $x = \frac{3}{2}$ es un punto crítico.

$y' = 0$ Condición de extremo. $y' = \frac{4x \cdot (3-2x) - 2x^2(-2)}{(3-2x)^2} = \frac{12x - 8x^2 + 4x^2}{(3-2x)^2} = \frac{12x - 4x^2}{(3-2x)^2}$

$y' = \frac{12x - 4x^2}{(3-2x)^2} = 0 \Rightarrow 12x - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x(3-x) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ Posibles extremos

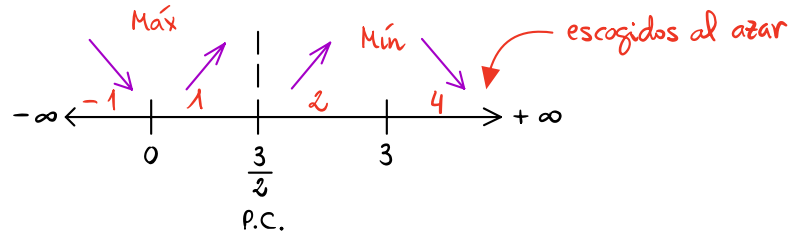
se cancela el denominador

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

Hay un punto crítico en $x = \frac{3}{2}$
Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{4x(3-x)}{(3-2x)^2}$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo



$y'(-1) = \frac{-}{+} < 0 \searrow$

$y'(1) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

$y'(2) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

$y'(4) = \frac{-}{+} < 0 \searrow$

Crece $(0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 3)$
Decrece $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Intervalos de Monotonía

En $x=0$ hay un mínimo relativo

En $x=3$ hay un máximo relativo

En $x = \frac{3}{2}$ hay un punto crítico

Coordenadas de los extremos: $\frac{2x^2}{3-2x}$

Si $x=0$, $y(0) = \frac{0^2}{3-2 \cdot 0} = 0$,

Si $x=3$, $y(3) = \frac{2 \cdot 3^2}{3-2 \cdot 3} = -6$,

mínimo relativo (0,0)

máximo relativo (3,-6)

4. Sea la función $f(x) = \sin x - \cos x$:

a) Calcula los intervalos de curvatura.

b) Calcula los puntos de inflexión y sus coordenadas en todo $\mathbb{R}$.

Curvatura $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión. $y' = \cos x + \sin x$

$$y'' = -\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1$$

$x = \arctan(1) \Rightarrow$ Tenemos 2 soluciones (1º y 3º cuadrante), $\alpha = \frac{\pi}{4} \in \text{I}^\circ$

3º cuadrante: $\alpha, \pi + \alpha$ obtenemos el ángulo sumando $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in \text{III}^\circ$

Se puede expresar en una solución $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ Posibles Puntos de inflexión P.I.

Entre 0 y 2π tenemos 2 posibles puntos de inflexión $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

La 3ª derivada $y''' = -\cos x - \sin x$; evaluamos los posibles Puntos de inflexión P.I.

$$y''' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \neq 0 \text{ luego son Puntos de inflexión P.I. confirmados. (igual con } \frac{5\pi}{4} \text{)}$$

$$\text{Coordenadas: siendo } y = \sin x - \cos x \Rightarrow y \left(\frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$y \left(\frac{5\pi}{4} \right) = \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} = 0$$

$\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, 0 \right)$ P.I., $k \in \mathbb{Z}$; Podemos deducir los intervalos de curvatura con la 2ª derivada.

$$y'' = -\sin x + \cos x$$

$$\text{Si } x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right), y''(0) = -\sin 0 + \cos 0 = 1 > 0$$

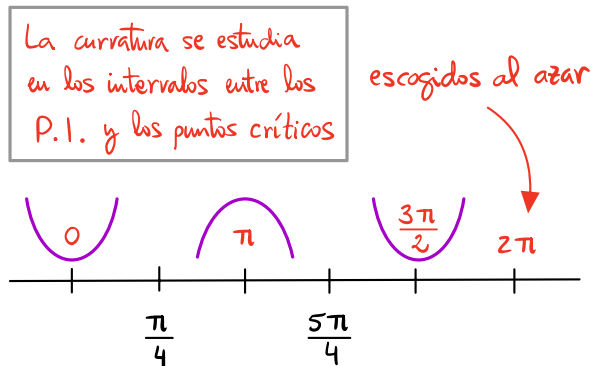
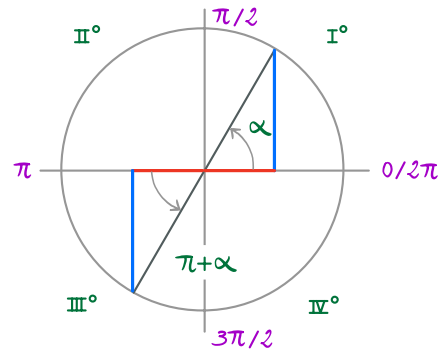
$\Rightarrow$ Convexa $\cup$ en $\left(0, \frac{\pi}{4} \right)$

$$\text{Si } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right), y''(\pi) = -\sin \pi + \cos \pi = -1 < 0$$

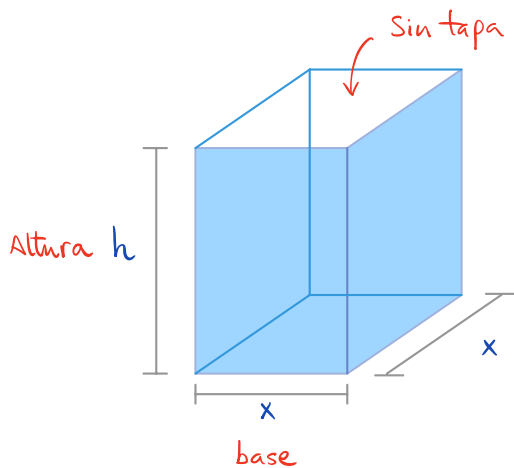
$\Rightarrow$ Cóncava $\cap$ en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right)$

$$\text{Si } x \in \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right), y'' \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ Convexa $\cup$ en $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right)$



5. Queremos diseñar una caja de cartón de base cuadrada y sin tapa de modo que contenga un volumen de 2 m^3 . Calcula las dimensiones (x = lado de la base, h = altura-caja) para que la superficie de la caja sea mínima. Comprueba que, efectivamente, esa superficie es mínima y calcúlala. (2 pt)



Ligadura o restricción

$$V = \text{base} \cdot \text{altura} = x^2 \cdot h = 2 \text{ m}^3 \quad \text{Volumen limitado}$$

Función objetivo (4 laterales + base)

$$A = 4 \cdot x \cdot h + x^2 \quad \text{Minimizar superficie}$$

$$x^2 \cdot h = 2 \quad , \quad \text{en la ligadura, despejamos una variable en función de la otra.}$$

$$h = \frac{2}{x^2}$$

$$A = 4 \cdot x \cdot h + x^2 = 4 \cdot x \cdot \frac{2}{x^2} + x^2 = \frac{8}{x} + x^2 \quad , \quad \text{Derivamos para que sea extremal.}$$

$$A'(x) = \frac{dA(x)}{dx} = -\frac{8}{x^2} + 2x = 0 \quad \text{Condición de extremo}$$

$$2x = \frac{8}{x^2} \Rightarrow 8 = 2x^3 \Rightarrow 4 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4} \text{ m} \simeq 1,587 \text{ m}$$

$$A''(x) = \frac{d^2A(x)}{dx^2} = \frac{16}{x^3} + 2 \quad , \quad \text{Veamos si es mínimo con la 2ª derivada.}$$

$$A''(\sqrt[3]{4}) = \frac{16}{\sqrt[3]{4}^3} + 2 = 6 > 0 \Rightarrow \text{en } x = \sqrt[3]{4} \text{ hay un mínimo.}$$

$$\text{La altura } h = \frac{2}{x^2} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}^2} = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \simeq \frac{2}{1,587^2} \simeq 0,794 \text{ m}$$

$$\text{La superficie mínima } A = 4 \cdot x \cdot h + x^2 = 4 \cdot 1,587 \cdot 0,794 + 1,587^2 \simeq 7,56 \text{ m}^2$$

$$\text{El cálculo exacto sería } A = 4 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4}^2 = 4 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$$

Para asegurarnos de que es un mínimo absoluto, vamos a analizar los casos extremos:

Si $x = 0 \Rightarrow h = \infty$ y viceversa. Estas soluciones no tienen sentido.

$$x = \sqrt[3]{4} \text{ m} \simeq 1,587 \text{ m}$$

$$h = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \simeq 0,794 \text{ m}$$

$$A = 6 \cdot \sqrt[3]{2} \text{ m}^2 \simeq 7,56 \text{ m}^2$$

6. Calcula por partes la siguiente integral indefinida: $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$

$\int x^2 \cdot \cos x \, dx$; Identificamos 2 partes a nuestro antojo, por ejemplo:

$$\left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{array} \right| \quad \boxed{\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du}$$

$$I = \int u \, dv = \int \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{\sin x}_v - \int \underbrace{\sin x}_v \cdot \underbrace{2x \, dx}_{du}$$

$I = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx$; Aplicamos de nuevo (iteramos) la integración por partes.

$$I_2 = \int x \cdot \sin x \, dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = 1 \cdot dx \\ dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{array} \right|$$

$$I_2 = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

$$\text{Finalmente } I = x^2 \cdot \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \sin x) + C$$

$$I = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C$$

$$\boxed{I = (x^2 - 2) \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + C}$$

$$\text{Comprobación: } I' = \cancel{2x} \cdot \cancel{\sin x} + (x^2 - 2) \cdot \cos x + 2 \cdot \cos x - \cancel{2x} \cdot \cancel{\sin x} =$$

$$I' = x^2 \cdot \cos x - \cancel{2} \cdot \cancel{\cos x} + \cancel{2} \cdot \cancel{\cos x} = x^2 \cdot \cos x \quad \text{Q.E.D.}$$