

Geometría-Análisis

1. Se considera la recta $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto $P = (1,1,1)$. Dado el punto $O (0,0,0)$ de r , hallar todos los puntos A pertenecientes a la recta r , tales que el triángulo de vértices A, P y O tengan área 1. **(1,5 ptos.)**
2. Considera las rectas dadas por $r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$. Calcula la posición de dichas rectas, su distancia y la ecuación de la recta que las corta perpendicularmente. **(2 ptos.)**
3. Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación continua $r: \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$
 - a) Calcula la posición relativa de π y r según los valores del parámetro m .
 - b) Calcula la distancia del punto $P (1,1,4)$ a la recta r si $m = -1$. **(2 ptos.)**
4. a) Calcula el valor de a para que se verifique que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+2} \right)^{\frac{ax-1}{3}} = e$ **(1 pto.)**

b) Calcula a, b y c para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ x + \ln(1 + x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable y tenga un extremo relativo en $x = -2$ (es decir, $f'(-2) = 0$). **(1,5 ptos.)**

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje OX . **(1 pto.)**
5. Enuncia el teorema de Bolzano. Justifica que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX en el intervalo $[-1,1]$. **(1 pto.)**

1. Se considera la recta $r: \begin{cases} x-y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ y el punto $P = (1,1,1)$. Dado el punto $O(0,0,0)$ de r ; hallar todos los puntos A pertenecientes a la recta r , tales que el triángulo de vértices A, P y O tengan área 1. (1,5 pts.)

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \equiv \pi_1 \\ x+2y+3z=0 \equiv \pi_2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} P(1,1,1) \text{ exterior} \\ O(0,0,0) \in r; A(x,y,z) \in r \end{array} \right.$$

Calculamos $\vec{u}_r$ como el producto vectorial de los vectores normales de sus ecuaciones cartesianas:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \vec{n}_2 = (1, 2, 3) \end{array} \right\} \vec{u}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3)\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} = (-1, -1, 1)$$

Simplifico $\div 3$ $\uparrow$

Construimos los vectores $\begin{cases} \vec{OP} = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1) \\ \vec{OA} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases}$

El triángulo formado $\triangle_{OP}$ tiene un $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{OP} \times \vec{OA}|$ $= 1 \text{ u}^2$ ↖ enunciado

Como tenemos 3 incógnitas (x, y, z) , vamos a escribir la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

Utilizando el vector director $\vec{u}_r = (-1, -1, 1)$ y el punto $O(0,0,0) \in r$:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{De este modo tenemos una sola incógnita } \lambda \Rightarrow A(-\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{OP} \times \vec{OA}| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} \right\| = 1 \text{ u}^2 \Rightarrow$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{i} \cdot 2\lambda - \vec{j} \cdot 2\lambda + \vec{k} \cdot 0| = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |(2\lambda, -2\lambda, 0)| = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{8\lambda^2} = 2 \Rightarrow 8\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Existen dos soluciones: $O \triangle_{A_1 A_2} P$; Sustituimos λ en las ecuaciones paramétricas de r :

$$A(-\lambda, -\lambda, \lambda) \Rightarrow \boxed{A_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); A_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

2. Considera las rectas dadas por $r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$. Calcula la posición de dichas rectas, su distancia y la ecuación de la recta que las corta perpendicularmente. (2 ptos.)

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \equiv \pi_1 \\ x - z + 1 = 0 \equiv \pi_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \vec{n}_2 = (1, 0, -1) \end{cases} \quad \text{Calculamos } \vec{u}_r \text{ como el producto vectorial de los vectores normales de sus ecuaciones cartesianas.}$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot (-1) + \vec{k} \cdot 1 = (1, 1, 1)$$

El vector director de la recta s : $\vec{v}_s = (-1, 1, 0)$.

Para estudiar la posición relativa, veamos primero si $\vec{u}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales.

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \Rightarrow \vec{u}_r \text{ y } \vec{v}_s \text{ NO son proporcionales, las rectas se cortan o bien se cruzan.}$$

Tomamos un punto de cada recta: $P \in r$, $Q \in s$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -y + 1 = 0 \\ -z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P(0, 1, 1) \in r \\ Q(1, 0, 2) \in s \end{matrix} \text{ (sale directamente)}$$

$$\text{Construimos el vector } \vec{PQ} = Q - P = (1, 0, 2) - (0, 1, 1) = (1, -1, 1)$$

La ecuación implícita del plano viene dada por el determinante de los 3 vectores:

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{v}_s \\ \vec{PQ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2 \neq 0, \text{ NO son coplanarios} \Rightarrow$$

r y s se cruzan en el espacio.

La distancia entre dos rectas que se cruzan

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|}$$

En nuestro caso hemos cambiado el orden del producto mixto. El resultado no cambia.

$$\vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-1) - \vec{j} \cdot 1 + \vec{k} \cdot 2 = (-1, -1, 2)$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} u$$

$$d(r, s) = \frac{\sqrt{6}}{3} u$$

La ecuación de la recta perpendicular común a r y s se puede construir como la intersección de dos planos auxiliares que contienen a cada recta y tienen la dirección de $\vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P(0, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \\ Q(1, 0, 2) \in s \end{array} \right\} \vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2)$$

$$\bullet \pi_r \text{ contiene a } \vec{u}_r \text{ y } \vec{w} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & 1 & -1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x \cdot 3 - (y-1) \cdot 3 + (z-1) \cdot 0 = 0 \\ \pi_r \equiv 3x - 3y + 3 = 0 \quad \div 3 \\ \pi_r \equiv x - y + 1 = 0 \end{array}$$

$$\bullet \pi_s \text{ contiene a } \vec{v}_s \text{ y } \vec{w} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-0 & 1 & -1 \\ z-2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} (x-1) \cdot 2 - y(-2) + (z-2) \cdot 2 = 0 \\ \pi_s \equiv 2x + 2y + 2z - 6 = 0 \quad \div 2 \\ \pi_s \equiv x + y + z - 3 = 0 \end{array}$$

La ecuación de la recta perpendicular común a r y s es

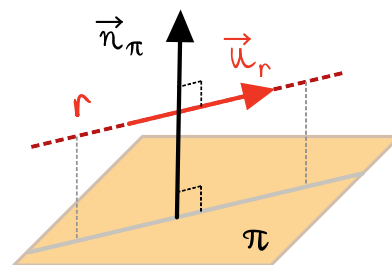
$$t \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

3. Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación continua $r: \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$

- a) Calcula la posición relativa de π y r según los valores del parámetro m .
b) Calcula la distancia del punto $P(1, 1, 4)$ a la recta r si $m = -1$. (2 pts.)

$$a) \pi \equiv 2x + y - z + 2 \quad ; \quad r \equiv \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$$

Si la recta r y el plano π son paralelos, entonces el vector normal al plano y el vector director de la recta son perpendiculares y, como consecuencia, su producto escalar nulo.



$$\vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0$$

El vector del plano $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$ y $\vec{u}_r = (-2, 1, m)$; el producto escalar:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = (2, 1, -1) \cdot (-2, 1, m) = 0 \Rightarrow -4 + 1 - m = 0 \Rightarrow m = -3$$

Si $m = -3$ el plano y la recta son paralelos. No son coincidentes porque $A(5, 0, 6) \in r \notin \pi$

Si $m \neq -3$ el plano y la recta son secantes, es decir, se cortan en un punto.

b) Si $m = -1$, calcula la distancia del punto $P(1, 1, 4)$ a la recta r .

$$r \equiv \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-1} ; \vec{u}_r = (-2, 1, -1) ; A(5, 0, 6)$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} \quad \text{Distancia de un punto a una recta}$$

Construimos el vector $\vec{AP} = P - A = (1, 1, 4) - (5, 0, 6) = (-4, 1, -2)$

$$|\vec{AP} \times \vec{u}_r| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{array} \right\| = |\vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot (-2)| = |(-1, 0, -2)| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{2^2+1+1} = \sqrt{6} ; \text{ finalmente}$$

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} u$$

4. a) Calcula el valor de a para que se verifique que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+2} \right)^{\frac{ax-1}{3}} = e$ (1 pto.)

El límite es el resultado de una indeterminación 1^∞ IND cuyo resultado es $e^L = e^1 \Rightarrow L=1$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{ax-1}{3} \right)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{2x+2} \cdot \frac{ax-1}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5ax+5}{6x+6} = \frac{-5a}{6} = 1 \Rightarrow$$

$\frac{\infty}{\infty}$ IND

$$a = -\frac{6}{5}$$

b) Calcula a , b y c para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ x + \ln(1+x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y

derivable y tenga un extremo relativo en $x = -2$ (es decir, $f'(-2) = 0$).

(1,5 ptos.)

Continuidad en los abiertos

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$ por ser una función polinómica.

$f(x)$ es continua en $(0, \infty)$ porque el argumento del logaritmo $(1+x^2)$, es siempre positivo.

El único punto problemático que tenemos que estudiar es $x = 0$ (la frontera entre los intervalos).

Continuidad

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) ; \text{ Estudiamos } x=0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + bx + c = c = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln(1+x^2) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Derivabilidad

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Extremo

$$f'(a) = 0 ; \text{ condición de extremo.}$$

$$x = -2 \in (-\infty, 0] \text{ 1er trazo}$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \text{ con } b=1$$

$$2a(-2) + 1 = 0 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{1}{4}}$$

$f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ si $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$ y $c = 0$.

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x+1)e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje OX. (1 pto.)

La ecuación punto-pendiente de la función $f(x)$ en $x=a$ tiene la forma:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

$$\text{Puntos de corte: } f(x) = 0 \Rightarrow (x+1) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Recta tangente: } f(-1) = (-1+1) \cdot e^{-(-1)} = 0$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+1) \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(\cancel{1} - x - \cancel{1}) = -x \cdot e^{-x}$$

$$f'(-1) = -(-1) \cdot e^{-(-1)} = e$$

$$y - 0 = e \cdot (x - (-1)) \Rightarrow \boxed{y = e \cdot (x+1)}$$

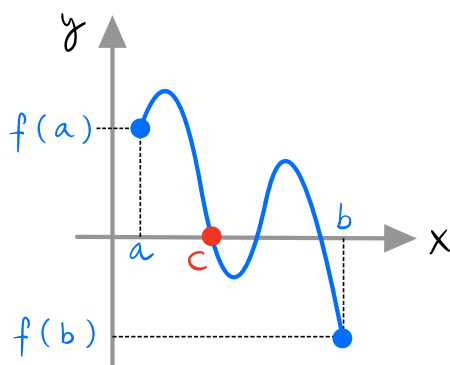
5. Enuncia el teorema de Bolzano. Justifica que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX en el intervalo $[-1,1]$. (1 pto.)

Teorema de Bolzano

$f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ función continua en el intervalo cerrado.

$f(a) \cdot f(b) < 0$ imágenes de distinto signo en los bordes del intervalo.

Con estas condiciones $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = 0$, es decir, existe un punto dentro del intervalo abierto en el que la función corta al eje OX.



Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces la gráfica corta necesariamente al eje OX (abscisas) en al menos un punto c del intervalo abierto (a,b) . El teorema no permite saber cuántas raíces (puntos de corte) tiene la función ni su localización.

En nuestro caso: $f(x) = x^{15} + x + 1$ es continua en el intervalo $[-1,1]$ por ser polinómica.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 < 0 \\ f(1) = 1 + 1 + 1 = 3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$$

Se cumplen las condiciones, luego $\boxed{\exists c \in (-1,1) / f(c) = 0}$, es decir, corta al eje OX.