

GEOMETRÍA

1. Sean la recta $r : \begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \\ 7x - y - 2z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + m \cdot y + 3 = 0$
- a) Calcula el valor de m para que la recta r y el plano π sean paralelos. Para ese valor, calcula la distancia entre la recta y el plano. (1,5 pt.)
- b) Para $m = 1$ calcula el ángulo que forman la recta y el plano. (1 pt.)
2. Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo. Se pide:
- a) Ecuación del plano que contiene al triángulo y área del triángulo. (1,5 pt.)
- b) Ecuación de los planos paralelos al anterior cuya distancia sea 2 unidades. (1 pt.)
3. Dadas las rectas $r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$ y $s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$:
- a) Calcula la posición relativa entre las rectas r y s y calcula el punto simétrico del punto $P(0,1,0)$ con respecto a la recta r . (1,25 pt.)
- b) Determina la ecuación de la recta perpendicular común a r y s . (1,25 pt.)
4. Sean las rectas $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$
- a) Calcula la posición relativa de r y s . Calcula la distancia de r y s . (1,5 pt.)
- b) Si dos de los lados del rectángulo están sobre las rectas r y s y dos de los vértices consecutivos de un rectángulo son los puntos $A(0,1,1)$ y $B(0,4,4)$ calcula las coordenadas de uno de los otros dos vértices para calcular el área del rectángulo. (1 pt.)

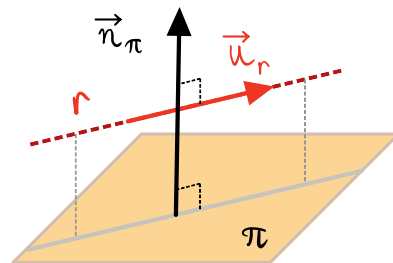
1. Sean la recta $r : \begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \\ 7x - y - 2z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + m \cdot y + 3 = 0$

a) Calcula el valor de m para que la recta r y el plano π sean paralelos. Para ese valor, calcula la distancia entre la recta y el plano. (1,5 pt.)

b) Para $m = 1$ calcula el ángulo que forman la recta y el plano. (1 pt.)

a) Si la recta r y el plano π son paralelos, entonces el vector normal al plano y el vector director de la recta son perpendiculares y, como consecuencia, su producto escalar nulo.

$$\vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0$$



Calculamos $\vec{u}_r$ como el producto vectorial de los vectores normales de sus ecuaciones cartesianas.

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \equiv \pi_1 \\ 7x - y - 2z = 0 \equiv \pi_2 \end{cases} \quad \left| \quad \boxed{\vec{u}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \in r} \right. \quad \begin{aligned} \vec{n}_1 &= (1, 2, -2) \\ \vec{n}_2 &= (7, -1, -2) \end{aligned}$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6)\vec{i} + (-12)\vec{j} + (-15)\vec{k} = (-6, -12, -15)$$

Simplifico $\cdot (-3)$ $\uparrow$

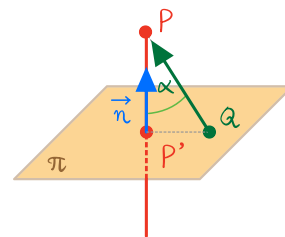
$$\vec{u}_r = (2, 4, 5)$$

El vector del plano $\vec{n}_\pi = (2, m, 0)$ y $\vec{u}_r = (2, 4, 5)$; el producto escalar:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = (2, m, 0) \cdot (2, 4, 5) = 0 \Rightarrow 4 + 4m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Ahora vamos a calcular la distancia entre la recta y el plano.

$$d(P, \pi) = d(P, P') = |\vec{PP'}| \Rightarrow \boxed{d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$



Calculamos un punto $P \in r$. Damos un valor arbitrario a una variable y resolvemos el sistema.

$$\text{Si } x=0, \begin{cases} 2y - 2z + 6 = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \text{ Resto } \Rightarrow 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow z = -\frac{y}{2} = 1$$

$$P = (0, -2, 1) \in r$$

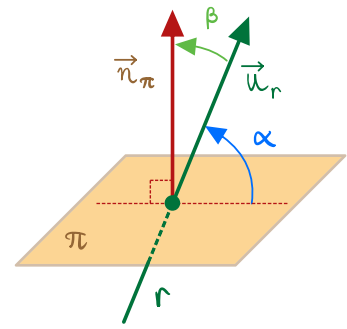
La ecuación del plano $\pi \equiv 2x - y + 3 = 0$ y su vector normal $\vec{n}_\pi = (2, 1, 0)$; sustituimos P :

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - (-2) + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ u}$$

b) Si $m = 1$, $\vec{n}_\pi = (2, 1, 0)$, $\vec{u}_r = (2, 4, 5)$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsen\left(\frac{8}{15}\right) = 32,23^\circ \text{ (ángulo recta-plano).}$$



2. Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo. Se pide:

a) Ecuación del plano que contiene al triángulo y área del triángulo. (1,5 pt.)

b) Ecuación de los planos paralelos al anterior cuya distancia sea 2 unidades. (1 pt.)

a) Construimos los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AP}$ siendo $P(x, y, z) \in \pi$ un punto genérico del plano.

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= B - A = (6, 2, 3) \\ \vec{AC} &= C - A = (-4, -2, 1) \\ \vec{AP} &= P - A = (x+3, y-4, z) \end{aligned} \right\} \text{ El vector } \vec{AP} \in \pi \text{ tiene que ser linealmente dependiente de los vectores } \vec{AB} \text{ y } \vec{AC}.$$

La ecuación implícita del plano se calcula con

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - a_1 \\ u_2 & v_2 & y - a_2 \\ u_3 & v_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Ecuación implícita}$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+3) \cdot 8 - (y-4) \cdot 0 + z \cdot (-12-4) = 0 \Rightarrow$$

$$8x - 16z + 24 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2z + 3 = 0$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| \quad \text{Área del triángulo}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{i} \cdot 8 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot (-16)| = \frac{1}{2} \cdot |(8, 0, -16)|$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8^2 + 16^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{320} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{5} \Rightarrow \text{Área} = 4\sqrt{5} \text{ u}^2$$

b) Calculamos la ecuación de los planos paralelos que equidistan 2 unidades.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2z + 3 = 0 \\ \pi' \equiv x - 2z + D = 0 \end{array} \right\} d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = 2 \quad ; \text{escogemos el punto } A(-3, 4, 0) \in \pi$$

$$d(A, \pi') = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-3 - 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|-3 + D|}{\sqrt{5}} = 2$$

$$\text{Solución 1: } -3 + D = 2\sqrt{5} \Rightarrow D = 3 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \pi' \equiv x - 2z + 3 + 2\sqrt{5} = 0$$

$$\text{Solución 2: } -3 + D = -2\sqrt{5} \Rightarrow D = 3 - 2\sqrt{5} \Rightarrow \pi' \equiv x - 2z + 3 - 2\sqrt{5} = 0$$

3. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$:

- Calcula la posición relativa entre las rectas r y s y calcula el punto simétrico del punto $P(0, 1, 0)$ con respecto a la recta r . (1,25 pt.)
- Determina la ecuación de la recta perpendicular común a r y s . (1,25 pt.)

a) Para conocer las posiciones relativas de dos rectas, r y s , estudiaremos si sus vectores directores son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P(0, 1, -4) \in r \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 4) \\ Q(0, 0, 0) \in s \end{array} \right\} \vec{QP} = (0, 1, -4)$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{4} \Rightarrow \vec{u}_r \text{ y } \vec{v}_s \text{ NO son proporcionales, las rectas se cortan o bien se cruzan.}$$

La ecuación implícita del plano viene dada por el determinante de los 3 vectores:

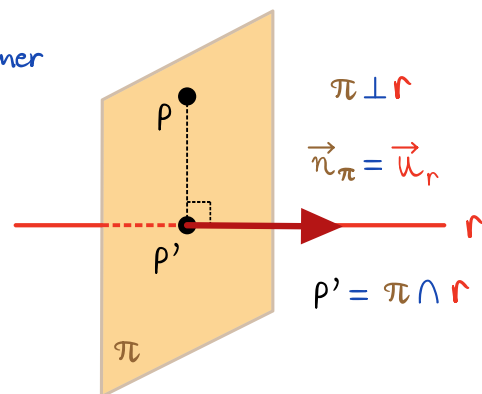
$$\begin{vmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{v}_s \\ \vec{QP} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 1 \cdot (-12 + 1) = -5 \neq 0, \text{ NO son coplanarios} \Rightarrow$$

r y s se cruzan en el espacio.

El punto simétrico de $P(0, 1, 0)$ con respecto de la recta r se puede obtener

calculando la proyección ortogonal P' del punto P sobre la recta r .

Calculamos el plano π perpendicular a r que pasa por P . Después calculamos la intersección $P' = \pi \cap r$. Finalmente, P' es el punto medio de P y el punto simétrico buscado P'' .



$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$; tomamos como vector normal del plano π al vector director de r .

$$\pi \perp r \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (2, 3, -1) \Rightarrow \pi \equiv 2x + 3y - z + D = 0 ; \text{ sustituimos } P(0, 1, 0)$$

$$3 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 3y - z - 3 = 0$$

$P' = \pi \cap r \Rightarrow$ Vamos a escribir las ecuaciones paramétricas de r y a sustituirlas en el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} x = a_1 + \lambda \cdot u_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot u_2 \\ z = a_3 + \lambda \cdot u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 + \lambda \cdot 2 = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \cdot 3 = 1 + 3\lambda \\ z = -4 + \lambda \cdot (-1) = -4 - \lambda \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sustituimos}} \pi \equiv 2x + 3y - z - 3 = 0$$

$$2 \cdot 2\lambda + 3(1 + 3\lambda) - (-4 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 4\lambda + 3 + 9\lambda + 4 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} ; \text{ calculamos } P' \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda = 2\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{4}{7} \\ y = 1 + 3\lambda = 1 + 3\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{7} \\ z = -4 - \lambda = -4 - \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{26}{7} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{La proyección ortogonal} \\ P' \left(-\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{26}{7}\right) \end{array} \right.$$

Para hallar el punto simétrico P'' sabemos que $P' = \frac{P + P''}{2}$, despejando $2P' = P + P'' \Rightarrow$

$$P'' = 2P' - P \Rightarrow P'' = 2 \cdot \left(-\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{26}{7}\right) - (0, 1, 0) \Rightarrow P'' = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{52}{7}\right) \quad \text{Punto simétrico}$$

b) La ecuación de la recta perpendicular común a r y s se puede construir como la intersección de dos planos auxiliares que contienen a cada recta y tienen la dirección de $\vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P(0, 1, -4) \in r \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 4) \\ Q(0, 0, 0) \in s \end{array} \right\} \vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (13, -9, -1)$$

$$\bullet \pi_r \text{ contiene a } \vec{u}_r \text{ y } \vec{w} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 13 \\ y-1 & 3 & -9 \\ z+4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -12x - (y-1) \cdot 11 + (z+4) \cdot (-57) = 0 \\ \pi_r \equiv -12x - 11y - 57z - 217 = 0 \\ \pi_r \equiv 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \end{array}$$

$$\bullet \pi_s \text{ contiene a } \vec{v}_s \text{ y } \vec{w} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 13 \\ y & 1 & -9 \\ z & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s \equiv 35x + 53y - 22z = 0$$

La ecuación de la recta perpendicular común a r y s es

$$t \equiv \begin{cases} 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \\ 35x + 53y - 22z = 0 \end{cases}$$

4. Sean las rectas $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

- a) Calcula la posición relativa de r y s . Calcula la distancia de r y s . (1,5 pt.)
- b) Si dos de los lados del rectángulo están sobre las rectas r y s y dos de los vértices consecutivos de un rectángulo son los puntos $A(0,1,1)$ y $B(0,4,4)$ calcula las coordenadas de uno de los otros dos vértices para calcular el área del rectángulo. (1 pt.)

a) Para conocer las posiciones relativas de dos rectas, r y s , estudiaremos si sus vectores directores son proporcionales. $\vec{u}_r = (0, 3, 3) \Rightarrow$ se puede simplificar $(0, 1, 1)$

Las ecuaciones implícitas o cartesianas de una recta se pueden interpretar como la intersección de dos planos.

$$s \equiv \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \equiv \pi_1 \\ y - z - 2 = 0 \equiv \pi_2 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{El producto vectorial de los vectores normales a ambos planos} \\ \text{nos sirve como vector director de la recta: } \boxed{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \in s} \end{array} \right.$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot (-1) + \vec{k} \cdot 1 = (0, 1, 1) \quad ; \quad \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow$$

Los vectores directores $\vec{u}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales, las rectas son paralelas o bien coincidentes.

Para distinguir ambas situaciones verificamos si un punto de r verifica también las ecuaciones de s .

$P(0, 1, 1) \in r$; probamos sus coordenadas en la recta s .

$$s \equiv \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 1 - 1 + 2 \neq 0 \\ 1 - 1 - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow P \notin s \Rightarrow \boxed{r \parallel s \text{ (paralelas)}}$$

Vamos a calcular la distancia entre r y s . $d(r, s) = d(P, s) = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|}$ Distancia de un punto a una recta

Escogemos un punto $Q \in s$. Si $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow Q(-4, 0, -2) \in s$

$$\vec{PQ} = Q - P = (-4, 0, -2) - (0, 1, 1) = (-4, -1, -3); \text{ Sabemos que } \vec{v}_s = (0, 1, 1)$$

$$|\vec{PQ} \times \vec{v}_s| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 2 - \vec{j} \cdot (-4) + \vec{k} \cdot (-4) = (2, 4, -4); \text{ Este vector no se puede simplificar.}$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{1^2 + 1^2} \Rightarrow d(P, s) = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d(r, s) = 3\sqrt{2} u}$$

b) Consideramos los puntos $A(0, 1, 1)$ y $B(0, 4, 4)$

Como se puede comprobar, pertenecen a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

La recta s es paralela y conocemos la distancia $d(r, s) = 3\sqrt{2}u$

Para calcular el área del rectángulo (lado por lado):

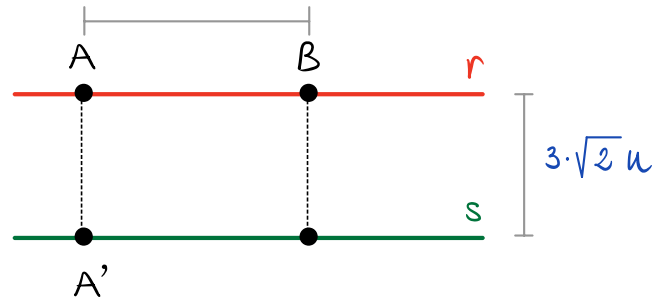
$$\text{Área} = |\vec{AB}| \cdot d(r, s)$$

$$\vec{AB} = (0, 4, 4) - (0, 1, 1) = (0, 3, 3)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

Se trata de un cuadrado.

$$\text{Área} = 3\sqrt{2}u \cdot 3\sqrt{2}u = 18u^2 \Rightarrow \boxed{\text{Área} = 18u^2}$$



Método II: Se calcula la proyección ortogonal A' de A sobre la recta s .

$$\text{El área será } \boxed{\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AA'}|}$$