

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

ESTADÍSTICA

-  1. Estudia la relación entre las variables estadísticas X (nota de la 1ª evaluación) e Y (nota de la 2ª evaluación) en la misma asignatura para 4 alumnos:

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	8	7	56	64	49
	7	6	42	49	36
	10	8	80	100	64
	5	5	25	25	25
Total	30	26	203	238	174

- a) Calcula la recta de regresión de Y sobre X . (1,5 pt)
- b) Razona el grado de dependencia entre las variables a partir del coeficiente de correlación. (0,5 pt)
- c) Dibuja la nube de puntos y la recta de regresión. (0,5 pt)

PROBABILIDAD

-  2. En un experimento aleatorio $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,25$, calcula las probabilidades de los sucesos:

- a) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (0,75 pt)
- b) $P(A|B)$ (0,5 pt)
- c) $P(A \cup B)$ (0,25 pt)

-  3. Una empresa comercializa dos productos A y B . El 45 % de sus ventas corresponde al producto A y el resto al producto B . El 15 % de las ventas correspondientes al producto A son devueltas, mientras que el porcentaje de devoluciones es el 5 % en el caso del producto B .

- a) Dibuja el diagrama en árbol con los todos datos. (0,5 pt)
Si un cliente compra un producto al azar, calcula la:
- b) probabilidad de que NO sea devuelto y sea del tipo A . (0,5 pt)
- c) probabilidad de que sea devuelto. (0,5 pt)
- d) probabilidad de que sea del tipo B si se sabe que NO ha sido devuelto. (0,5 pt)



4. Un sistema eléctrico está formado por 6 componentes independientes. La probabilidad de que falle uno cualquiera de los componentes es 0,15. Calcula la media de la distribución.

Calcula la probabilidad de que fallen menos de 2 componentes. (1,5 pt)

5. El gasto trimestral, en euros, en material de oficina, de los empleados de una empresa, sigue una distribución normal de media 550 € y desviación típica 60 €.

a) Determina el porcentaje de empleados que gasta entre 500 € y 625 €. (1,5 pt)

b) Si se eligen al azar 60 empleados:

¿cuántos de ellos se espera que superen los 650 € de gasto? (1 pt)



Complementario:

En la segunda vuelta de las elecciones presidenciales, el candidato *A* obtuvo el 52 % de los votos emitidos. El resto votó al candidato *B*. Si de la población que ha participado en la votación se eligen al azar 2000 personas, calcula la probabilidad que de menos de la mitad haya votado al candidato *A*. (1 pt)



1. Estudia la relación entre las variables estadísticas X (nota de la 1ª evaluación) e Y (nota de la 2ª evaluación) en la misma asignatura para 4 alumnos:

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	8	7	56	64	49
	7	6	42	49	36
	10	8	80	100	64
	5	5	25	25	25
Total	30	26	203	238	174

$$n = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{30}{4} = 7,5 \\ \bar{y} = \frac{26}{4} = 6,5 \end{array} \right.$$

- a) Calcula la recta de regresión de Y sobre X . (1,5 pt)
- b) Razona el grado de dependencia entre las variables a partir del coeficiente de correlación. (0,5 pt)
- c) Dibuja la nube de puntos y la recta de regresión. (0,5 pt)

$$S_{xy} = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i \right] - \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \text{Covarianza} \quad S_{xy} = \frac{203}{4} - 7,5 \cdot 6,5 = 2$$

$$s^2 = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (f_i x_i^2) \right] - \bar{x}^2 \quad \text{Varianza} \quad s = \sqrt{s^2} \quad \text{Desviación típica}$$

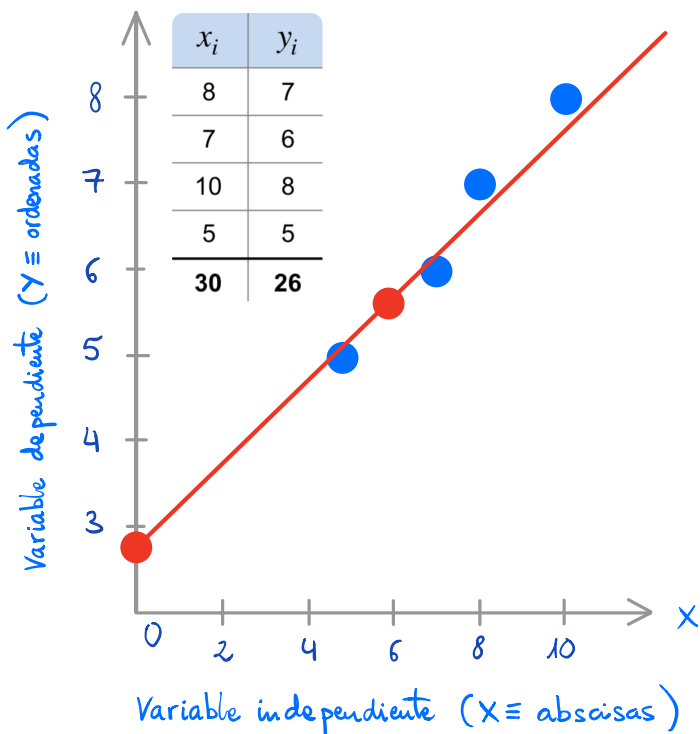
$$\left. \begin{array}{l} S_x^2 = \frac{238}{4} - 7,5^2 = 3,25, \quad S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{3,25} \simeq 1,80 \\ S_y^2 = \frac{174}{4} - 6,5^2 = 1,25, \quad S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{1,25} \simeq 1,12 \end{array} \right\} \quad \text{Desviación típica}$$

$$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{S_x^2} \cdot (x - \bar{x}) \quad \text{Recta de regresión } Y \text{ sobre } X$$

$$y = 6,5 + \frac{2}{3,25} \cdot (x - 7,5) \Rightarrow y = 6,5 - 0,615 \cdot (x - 7,5) \simeq 0,62 \cdot x + 1,89$$

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{2}{1,8 \cdot 1,12} \simeq 0,992 \quad \text{Coeficiente de correlación}$$

Un valor cercano a 1 indica una fuerte correlación lineal entre x e y y que la recta de regresión es creciente.



$$y = 0,62 \cdot x + 1,89$$

Escogemos 2 puntos para dibujar la recta de regresión

$$y = 0,62 \cdot 0 + 1,89 = 1,89 ,$$

$$y = 0,62 \cdot 6 + 1,89 = 5,61 ,$$

$$r = -0,94$$

$$(0 ; 1,89) , (6 ; 5,61)$$

2. En un experimento aleatorio $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,25$, calcula las probabilidades de los sucesos:

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (0,75 pt)

b) $P(A|B)$ (0,5 pt)

c) $P(A \cup B)$ (0,25 pt)

a) Como $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ (ley de Morgan)

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,25 = 0,75$$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625$

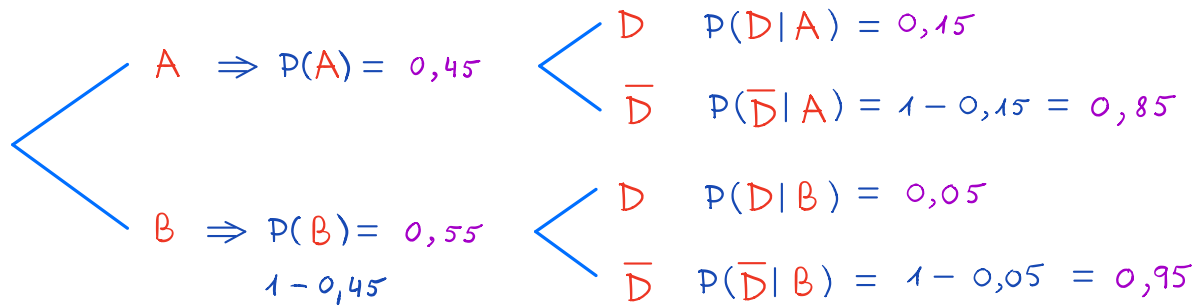
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,25 = 0,65$



3. Una empresa comercializa dos productos A y B . El 45 % de sus ventas corresponde al producto A y el resto al producto B . El 15 % de las ventas correspondientes al producto A son devueltas, mientras que el porcentaje de devoluciones es el 5 % en el caso del producto B .

- Dibuja el diagrama en árbol con los todos datos. (0,5 pt)
Si un cliente compra un producto al azar, calcula la:
- probabilidad de que NO sea devuelto y sea del tipo A . (0,5 pt)
- probabilidad de que sea devuelto. (0,5 pt)
- probabilidad de que sea del tipo B si se sabe que NO ha sido devuelto. (0,5 pt)

$D \equiv \text{Devuelto}$ $\bar{D} \equiv \text{No Devuelto}$



a) Intersección: $P(A \cap \bar{D}) = P(A) \cdot P(\bar{D}|A) = 0,45 \cdot 0,85 = 0,3825$

b) Probabilidad total: $P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B)$

$$P(D) = 0,45 \cdot 0,15 + 0,55 \cdot 0,05 = 0,095$$

c) Condición: $P(B|\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P(\bar{D}|B)}{1 - P(D)} = \frac{0,55 \cdot 0,95}{1 - 0,095} = \frac{0,5225}{0,905} = 0,5773$



4. Un sistema eléctrico está formado por 6 componentes independientes. La probabilidad de que falle uno cualquiera de los componentes es 0,15. Calcula la media de la distribución.

Calcula la probabilidad de que fallen menos de 2 componentes.

(1,5 pt)

La variable aleatoria X es binomial (éxito - fracaso), $B(n=6, p=0,15)$, $q = 1 - p = 1 - 0,15 = 0,85$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Distribución binomial} \\ \text{Combinaciones} \cdot (\text{prob. éxito})^{\text{nº éxitos}} \cdot (\text{prob. fracaso})^{\text{nº fracasos}} \end{array} \right.$$

$$P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = 0,3772 + 0,3993 = 0,7765$$

La media:

$$P(X=0) = \binom{6}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^{6-0} = 1 \cdot 0,85^6 \simeq 0,3772$$

$$P(X=1) = \binom{6}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^{6-1} = 6 \cdot 0,15 \cdot 0,85^5 \simeq 0,3993$$

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p \\ \mu &= 6 \cdot 0,15 \\ \mu &= 0,9 \end{aligned}$$

5. El gasto trimestral, en euros, en material de oficina, de los empleados de una empresa, sigue una distribución normal de media 550 € y desviación típica 60 €.

a) Determina el porcentaje de empleados que gasta entre 500 € y 625 €. (1,5 pt)

b) Si se eligen al azar 60 empleados:

¿cuántos de ellos se espera que superen los 650 € de gasto? (1 pt)

$$\mu = 550 \text{ €} , \sigma = 60 \text{ €}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma) = N(550, 60) \text{ Tipificación } \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

a) La probabilidad de que X esté en el intervalo $[500, 625]$ es: $P(500 \leq X \leq 625)$

$$P\left(\frac{500-550}{60} \leq \frac{X-550}{60} \leq \frac{625-550}{60}\right) = P(-0,83 \leq Z \leq 1,25) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq -0,83) =$$

$$= P(Z \leq 1,25) - [1 - P(Z \leq 0,83)] = 0,8944 - (1 - 0,7967) = 0,6911 \Rightarrow 69,11\%$$

Es decir, el 69,11% de los empleados gastará entre 500€ y 625€.

$$b) P(X \geq 650) = P\left(Z \geq \frac{650-550}{60}\right) = P(Z \geq 1,67) = 1 - P(Z \leq 1,67) =$$

$$P(X \geq 650) = 1 - 0,9525 = 0,0475 \Rightarrow 4,75\%$$

Superarán el gasto $60 \cdot 0,0475 = 2,85 \Rightarrow 3$ empleados



Complementario:

En la segunda vuelta de las elecciones presidenciales, el candidato A obtuvo el 52 % de los votos emitidos. El resto votó al candidato B . Si de la población que ha participado en la votación se eligen al azar 2000 personas, calcula la probabilidad que de menos de la mitad haya votado al candidato A . (1 pt)

$Y =$ " nº de votantes del candidato A " , $n = 2000$

$p = 0,52$ Probabilidad de éxito. $q = 1 - 0,52 = 0,48$ Probabilidad de fracaso.

Se trata de una distribución binomial $B(n, p) = B(2000; 0,52)$

Nos preguntan la probabilidad $P(Y < 1000)$, Resultaría larguísimo el cálculo.

Como n es grande , deben cumplirse las condiciones: $n \cdot p \geq 5$ $n \cdot q \geq 5$

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 2000 \cdot 0,52 = 1040 \geq 5 \\ n \cdot q = 2000 \cdot 0,48 = 960 \geq 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{se puede aproximar con una distribución normal:} \\ \mu = n p = 1040 \\ \sigma = \sqrt{n p q} = \sqrt{2000 \cdot 0,52 \cdot 0,48} \simeq 22,34 \end{array}$$

$$B(n, p) \sim N(\mu, \sigma) = N(n p, \sqrt{n p q}) = N(1040; 22,34)$$

$Y \approx X \sim N(\mu, \sigma)$, X es la variable de la distribución normal.

$$P(Y < 1000) \approx P(X \leq 1000 - 0,5) = P(X \leq 999,5) = P\left(Z \leq \frac{999,5 - 1040}{22,34}\right) =$$

↑
YATES

↑
TIPIFICACIÓN

$$\approx P(Z \leq -1,81) = 1 - P(Z \leq 1,81) = 1 - 0,9649 = 0,0351$$

↑
REDONDEO A
2 DÉCIMAS

Tenemos un 3,51 % de probabilidades. Es lógicamente una probabilidad baja.