

ANÁLISIS Y PROBABILIDAD

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

1. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x + a & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ b \cdot x^2 - 5x + 10 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (1,5 \text{ pt})$$

Halla los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 2$.

ANÁLISIS DE FUNCIONES

2. Sea la función $y = \frac{x^2}{3x - 6}$:

- a) Calcula los intervalos de **monotonía**. (1,5 pt)
- b) Clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**. (0,5 pt)

3. Sea la función $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + x$:

- a) Calcula los intervalos de **curvatura**. (1,5 pt)
- b) Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**. (0,5 pt)

PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

4. En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A , 200 de la marca B y 300 de la marca C . La probabilidad de que una camiseta de la marca A sea defectuosa es de 0,01; 0,03 si es de la marca B y 0,05 si es de la marca C . Una persona elige una camiseta al azar. (Nota: el diagrama de árbol puntúa).

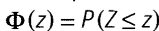
- a) Calcula la probabilidad de que la camiseta elegida no sea defectuosa. (0,75 pt)
- b) Si la camiseta elegida es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A ? (0,75 pt)
- c) Calcula usando propiedades, la probabilidad de que la camiseta elegida no sea defectuosa y al mismo tiempo no sea de la marca C . (1 pt)

5. El tiempo medio de espera de un viajero en una estación de tren, medido en minutos, sigue una distribución normal $N(7 ; 5,2)$. Cada mañana, 4000 viajeros acceden a esa estación. Determina el número de viajeros que esperó:

- a) Más de 9 minutos. (1 pt)
- b) Entre 5 y 10 minutos. (1 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

1. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x + a & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ b \cdot x^2 - 5x + 10 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ f'(a^-) = f'(a^+)$$

Halla los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 2$.

Condición de continuidad: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - x + a &= 2 + a = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} b x^2 - 5x + 10 &= 4b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Límites laterales iguales} \\ 2 + a = 4b \quad (1) \end{array}$$

Condición de derivabilidad: $f'(a^-) = f'(a^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$2x - 1 = 2bx - 5, \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 = 4b - 5 \quad (2)$$

$$b = \frac{3+5}{4} = 2, \quad a = 4b - 2 = 6 \quad \Rightarrow$$

$a = 6, b = 2$ para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$.

ANÁLISIS DE FUNCIONES

2. Sea la función $y = \frac{x^2}{3x - 6}$:

- Calcula los intervalos de **monotonía**.
- Clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**.

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2, \quad Df(x) = \mathbb{R} - \{2\}, \quad \text{luego } x = 2 \text{ es un punto crítico.}$$

$y' = 0$ Condición de extremo.

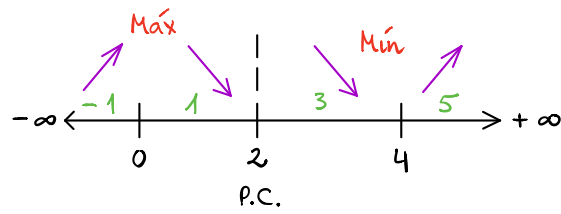
$$y' = \frac{2x \cdot (3x - 6) - x^2 \cdot 3}{(3x - 6)^2} = \frac{6x^2 - 12x - 3x^2}{(3x - 6)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(3x - 6)^2} = 0$$

se cancela el denominador

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = 4 \end{matrix} \quad \text{Posibles extremos}$$

Método de la 1ª derivada

$$y' = \frac{3x^2 - 12x}{(3x - 6)^2} \quad \text{Evaluamos puntos al azar en cada intervalo}$$



$$y'(-1) = \frac{3(-1)^2 - 12 \cdot (-1)}{+} > 0 \quad \nearrow$$

$$y'(1) = \frac{3(1)^2 - 12 \cdot (1)}{+} < 0 \quad \searrow$$

$$y'(3) = \frac{3(3)^2 - 12 \cdot (3)}{+} < 0 \quad \searrow$$

$$y'(5) = \frac{3(5)^2 - 12 \cdot (5)}{+} > 0 \quad \nearrow$$

Crece $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Decrece $(0, 2) \cup (2, 4)$

Monotonía

En $x=0$ hay un máximo relativo

En $x=4$ hay un mínimo relativo

En $x=2$ hay un punto crítico

b) Coordenadas de los extremos:

$$\text{Si } x=0, \quad y = \frac{x^2}{3x-6} = 0,$$

$$\text{Si } x=4, \quad y = \frac{4^2}{12-6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$

máximo relativo $(0, 0)$

mínimo relativo $(4, \frac{8}{3})$

3. Sea la función $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + x$: $Df(x) = \mathbb{R}$; no hay puntos críticos

a) Calcula los intervalos de **curvatura**.

b) Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**.

a) Curvatura. $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión.

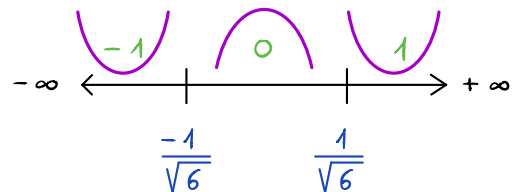
$$y' = 8x^3 - 4x + 1$$

$$y'' = 24x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{Posibles P.I.} \quad \text{Evaluamos puntos al azar en cada intervalo}$$

$$y''(-1) = 24 \cdot (-1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$

$$y''(0) = 24 \cdot (0)^2 - 4 < 0 \quad \text{cóncava}$$

$$y''(+1) = 24 \cdot (+1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$



Convexa $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty)$

Cóncava $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

Efectivamente $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ son P.I.

porque cambia la curvatura.

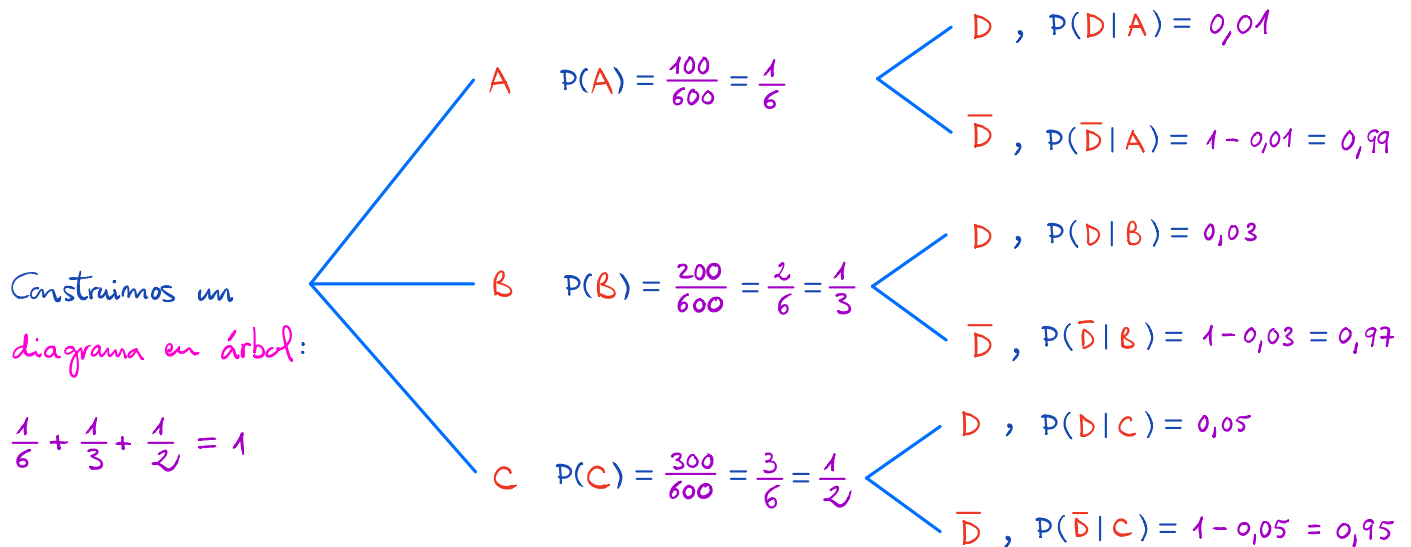
b) Coordenadas de los puntos de inflexión.

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -0,686\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0,13\right)$$

4. En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A, 200 de la marca B y 300 de la marca C. La probabilidad de que una camiseta de la marca A sea defectuosa es de 0,01; 0,03 si es de la marca B y 0,05 si es de la marca C. Una persona elige una camiseta al azar. (Nota: el diagrama de árbol puntúa).

- a) Calcula la probabilidad de que la camiseta elegida no sea defectuosa. (0,75 pt)
- b) Si la camiseta elegida es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A? (0,75 pt)
- c) Calcula usando propiedades, la probabilidad de que la camiseta elegida no sea defectuosa y al mismo tiempo no sea de la marca C. (1 pt)

Total: $100 + 200 + 300 = 600$



a) No defectuosa: $P(\bar{D}) = P(A) \cdot P(\bar{D}|A) + P(B) \cdot P(\bar{D}|B) + P(C) \cdot P(\bar{D}|C) =$

$$= \frac{1}{6} \cdot 0,99 + \frac{1}{3} \cdot 0,97 + \frac{1}{2} \cdot 0,95 = \frac{289}{300} = 0,9633$$

b) Sabemos que es defectuosa. Marca A. Teorema de Bayes.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 0,01}{0,0367} = 0,0454$$

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0,9633 = 0,0367$$

c) No es defectuosa y no es de la marca C $\Rightarrow P(\bar{D} \cap \bar{C})$

Por las leyes de Morgan $P(\bar{D} \cap \bar{C}) = P(\overline{D \cup C}) = 1 - P(D \cup C)$

$$P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) = 0,0367 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,5117$$

$$P(D \cap C) = P(C) \cdot P(D|C) = \frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$$

$$P(\bar{D} \cap \bar{C}) = 1 - P(D \cup C) = 1 - 0,5117 = 0,4883$$

5. El tiempo medio de espera de un viajero en una estación de tren, medido en minutos, sigue una distribución normal $N(7; 5,2)$. Cada mañana, 4000 viajeros acceden a esa estación. Determina el número de viajeros que esperó:

a) Más de 9 minutos.

(1 pt)

b) Entre 5 y 10 minutos.

(1 pt)

Llamamos X al tiempo. Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(7; 5,2)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Tipificación $\rightarrow Z \sim N(0,1)$

$$a) P(X > 9) = P\left(Z > \underbrace{\frac{9-7}{5,2}}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}\right) = P(Z > 0,38) = 1 - P(Z \leq 0,38) = \underbrace{0,352}_{\text{Tabla } 0,6480}$$

Viajeros $4.000 \cdot 0,352 = 1408$ viajeros

$$b) P(5 \leq X \leq 10) = P\left(\underbrace{\frac{5-7}{5,2}}_{\text{Redondeo a 2 decimales}} \leq Z \leq \underbrace{\frac{10-7}{5,2}}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}\right) = P(-0,38 \leq Z \leq 0,58) =$$

$$= P(Z \leq 0,58) - P(Z \leq -0,38) = \underbrace{P(Z \leq 0,58)}_{\text{Tabla}} - [1 - \underbrace{P(Z \leq 0,38)}_{\text{Tabla}}] =$$

$$= 0,7190 - (1 - 0,6480) = 0,367$$

Viajeros $4.000 \cdot 0,367 = 1468$ viajeros