

PROBABILIDAD

Nota: En todos los ejercicios, justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas escritas con símbolos.

1. Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio.
Se sabe que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,3$ y $P(A|B) = 0,6$:
 - a) Demuestra y calcula la probabilidad de que ocurran A y B . (0,75 pt)
 - b) Demuestra y calcula la probabilidad de que ocurran A o B . (0,5 pt)
 - c) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (0,75 pt)
 - d) ¿Son compatibles los sucesos A y B ? (0,5 pt)
2. En una ciudad se realizó una encuesta sobre los hábitos de consumo de noticias. El 40 % de las personas lee el periódico (A) diariamente. El 30 % ve las noticias en televisión (T) diariamente. El 20 % realiza ambas actividades (lee el periódico y ve las noticias en TV).
 - a) Calcula la probabilidad de que una persona vea las noticias en TV y no lea el periódico. (1 pt)
 - b) Calcula la probabilidad de que una persona lea el periódico, sabiendo que no ve las noticias en televisión. (1 pt)
 - c) ¿Son independientes los sucesos A y T ? (0,5 pt)
3. Un instituto tiene a sus estudiantes de Bachillerato distribuidos en tres modalidades: 240 estudiantes en Ciencias Sociales (S), 180 estudiantes en Humanidades (H) y 180 estudiantes en Ciencias (C). Se sabe que han elegido la asignatura optativa de Economía (E) el 30 % de los estudiantes de Ciencias Sociales, el 50 % de los estudiantes de Humanidades y el 20 % de los estudiantes de Ciencias.
 - a) Dibuja el diagrama de árbol completo (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
 - b) Determina la probabilidad de que un estudiante haya elegido Economía. (1 pt)
 - c) Si sabemos un estudiante seleccionado al azar ha elegido Economía, ¿Cuál es la probabilidad de que sea del itinerario de Ciencias Sociales? (1 pt)
4. En una fábrica de componentes electrónicos, se sabe que el 2 % es defectuoso, es decir, la probabilidad es 0,02 . Si se seleccionan al azar 15 componentes. Calcula la probabilidad de que:
 - a) exactamente 3 sean defectuosos. (1 pt)
 - b) como máximo 2 componentes sean defectuosos. (1,5 pt)

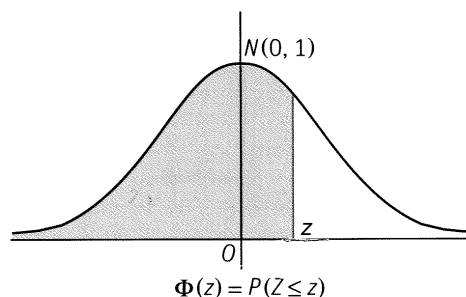
COMPLEMENTARIO: El gasto trimestral, en euros, en material de oficina, de los empleados de una empresa, sigue una distribución normal de media 550 € y desviación típica 60 €. Determina el porcentaje de empleados que gasta entre 500 € y 625 €.

(1,5 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio.
Se sabe que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,3$ y $P(A|B) = 0,6$:
- Demuestra y calcula la probabilidad de que ocurran A y B .
 - Demuestra y calcula la probabilidad de que ocurran A o B .
 - Demuestra y calcula la probabilidad: $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
 - ¿Son compatibles los sucesos A y B ?

a) $P(A \cap B) \Rightarrow$ Usamos $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
 $P(A \cap B) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$

b) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$
 $P(A \cup B) = 0,55 + 0,3 - 0,18 = 0,67$

c) Por las leyes de Morgan $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow$
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,67 = 0,33$

d) ¿Son A y B compatibles? Sí, son compatibles porque $P(A \cap B) \neq 0$

2. En una ciudad se realizó una encuesta sobre los hábitos de consumo de noticias. El 40% de las personas lee el periódico (A) diariamente. El 30% ve las noticias en televisión (T) diariamente. El 20% realiza ambas actividades (lee el periódico y ve las noticias en TV).

- Calcula la probabilidad de que una persona vea las noticias en TV y no lea el periódico. (1 pt)
- Calcula la probabilidad de que una persona lea el periódico, sabiendo que no ve las noticias en televisión. (1 pt)
- ¿Son independientes los sucesos A y T ? (0,5 pt)

$A \equiv$ lee el periódico ; $T \equiv$ ve la televisión ; $P(A) = 0,4$; $P(T) = 0,3$; $P(A \cap T) = 0,2$

a) $P(T \cap \bar{A}) = P(T) - P(T \cap A) = 0,3 - 0,2 = 0,1$

b) $P(A|\bar{T}) = \frac{P(A \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(A) - P(A \cap T)}{1 - P(T)} = \frac{0,4 - 0,2}{1 - 0,3} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}$

- c) Independencia. ¿ $P(A \cap T) = P(A) \cdot P(T)$? $0,2 \neq 0,4 \cdot 0,3$ No son independientes. Son dependientes.

Método de la tabla de contingencia:

Consideramos a 10 personas.

Rellenamos la tabla con los datos y calculamos el resto de celdas.

Con toda esta información calculamos las probabilidades.

	A	$\bar{A}$	
T	2		3
$\bar{T}$			
	4		10

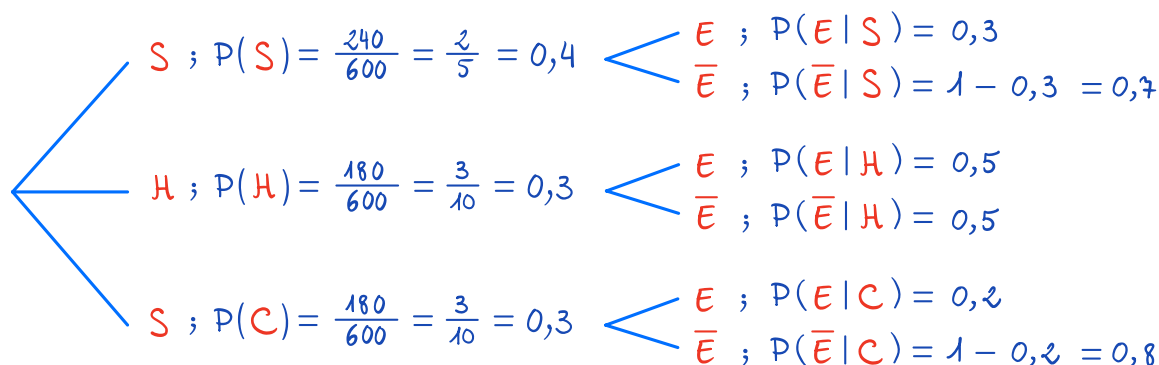
 $\Rightarrow$

	A	$\bar{A}$	
T	2	1	3
$\bar{T}$	2	5	7
	4	6	10

$P(T \cap \bar{A}) = \frac{1}{10} = 0,1$; $P(A|\bar{T}) = \frac{P(A \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{2}{7}$

3. Un instituto tiene a sus estudiantes de Bachillerato distribuidos en tres modalidades: 240 estudiantes en Ciencias Sociales (S), 180 estudiantes en Humanidades (H) y 180 estudiantes en Ciencias (C). Se sabe que han elegido la asignatura optativa de Economía (E) el 30 % de los estudiantes de Ciencias Sociales, el 50 % de los estudiantes de Humanidades y el 20 % de los estudiantes de Ciencias.
- a) Dibuja el diagrama de árbol completo (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
- b) Determina la probabilidad de que un estudiante haya elegido Economía. (1 pt)
- c) Si sabemos un estudiante seleccionado al azar ha elegido Economía, ¿Cuál es la probabilidad de que sea del itinerario de Ciencias Sociales? (1 pt)

a) Árbol completo: Total de estudiantes $240 + 180 + 180 = 600$ $E \equiv \text{Economía}$ Datos condicionales.



b) Probabilidad de que un estudiante haya elegido economía. Probabilidad total:

$$P(E) = P(S) \cdot P(E|S) + P(H) \cdot P(E|H) + P(C) \cdot P(E|C)$$

$$P(E) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,2 = \boxed{0,33} \text{ (entre 0,2 y 0,5).}$$

c) Teorema de Bayes: Economía (condición). Itinerario de Ciencias Sociales.

$$P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{P(S) \cdot P(E|S)}{P(E)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,33} = \frac{0,12}{0,33} = \boxed{0,3636}$$

4. En una fábrica de componentes electrónicos, se sabe que el 2 % es defectuoso, es decir, la probabilidad es 0,02 . Si se seleccionan al azar 15 componentes. Calcula la probabilidad de que:

a) exactamente 3 sean defectuosos.

(1 pt)

b) como máximo 2 componentes sean defectuosos.

(1,5 pt)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Distribución
binomial

Combinaciones · (prob. éxito)^{nº éxitos} · (prob. fracaso)^{nº fracasos}

Se trata de un experimento binomial con $p = 0,02$ (llamamos éxito a que un componente sea defectivo).

$B(n=15, p=0,02)$, $q = 1 - p = 1 - 0,02 = 0,98$; $X \equiv \{ \text{Suceso nº componentes defectuosos} \}$

a) $k = n^\circ$ éxitos. Nos preguntan la probabilidad de 3 defectuosos

$$P(X=3) = \binom{15}{3} \cdot (0,02)^3 \cdot (0,98)^{15-3} = \frac{15!}{3!12!} \cdot (0,02)^3 \cdot (0,98)^{12}$$

$$P(X=3) = 455 \cdot (0,02)^3 \cdot (0,98)^{12} \simeq 0,0029$$

b) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$P(X=0) = \binom{15}{0} \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{15-0} = \frac{15!}{0!15!} \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{15}$$

$$P(X=0) = 1 \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{15} \simeq 0,7386$$

$$P(X=1) = \binom{15}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^{15-1} = \frac{15!}{1!14!} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^{14}$$

$$P(X=1) = 15 \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^{14} \simeq 0,2261$$

$$P(X=2) = \binom{15}{2} \cdot (0,02)^2 \cdot (0,98)^{15-2} = \frac{15!}{2!13!} \cdot (0,02)^2 \cdot (0,98)^{13}$$

$$P(X=2) = 105 \cdot (0,02)^2 \cdot (0,98)^{13} \simeq 0,0323$$

$$P(X \leq 2) = 0,7386 + 0,2261 + 0,0323 = 0,997 \text{ , } 99,7\%$$

COMPLEMENTARIO: El gasto trimestral, en euros, en material de oficina, de los empleados de una empresa, sigue una distribución normal de media 550 € y desviación típica 60 €. Determina el porcentaje de empleados que gasta entre 500 € y 625 €.

(1,5 pt)

Llamamos $X \equiv \{\text{Gasto}\}$, $\mu = 550\text{€}$, $\sigma = 60\text{€}$

Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(550, 60)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$P(500 \leq X \leq 625) = P\left(\frac{500 - 550}{60} \leq Z \leq \frac{625 - 550}{60}\right) = P(\underbrace{-0,83}_{\text{Redondeo a 2 decimales}} \leq Z \leq \underbrace{1,25}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}) =$$

Tipificamos

$$= P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq -0,83) = P(Z \leq 1,25) - [1 - P(Z \leq 0,83)] =$$

Tabla 0,8944 Tabla 0,7967

$$= 0,8944 - 1 + 0,7967 = 0,6911 \Rightarrow 69,11\%$$