

PROBABILIDAD

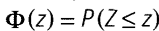
Nota: En todos los ejercicios, justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas escritas con símbolos.

1. Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio.
Se sabe que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,18$:
 - a) Demuestra y calcula la probabilidad de que ocurran A o B . (0,5 pt)
 - b) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(A|B)$ (0,75 pt)
 - c) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ (0,75 pt)
 - d) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (0,5 pt)
2. Una fábrica produce discos duros para ordenadores en dos turnos. En el primer turno, se producen 200 discos diarios y en el segundo 300. Por la experiencia pasada, se sabe que en el primer turno se produjo un 1 % de discos defectuosos y en el segundo un 2 % de discos defectuosos.
 - a) Dibuja el diagrama de árbol completo (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
 - b) Determina la probabilidad de que un disco elegido al azar sea defectuoso. (1 pt)
 - c) Si un disco NO es defectuoso, calcula la probabilidad de que provenga del primer turno. (1 pt)
3. En la elaboración de un producto se sabe que la probabilidad de que sea defectuoso es 0,2. Si se seleccionan al azar 8 unidades. Calcula la probabilidad de que:
 - a) exactamente 3 sean defectuosas. (1 pt)
 - b) por lo menos 2 y como máximo 4 unidades sean defectuosas. (1,5 pt)
4. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 *cm* y desviación típica 15 *cm*.:
 - a) Determina la probabilidad de que una persona tenga una estatura superior a 190 *cm* . (1 pt)
 - b) Si se eligen al azar 50 personas, ¿cuántas tendrán una estatura comprendida entre 162 *cm* y 186 *cm* ? (1,5 pt)

COMPLEMENTARIO: El ingreso a una Universidad se determina mediante una prueba. Las notas de esta prueba siguen una distribución normal de media 500 y una desviación típica de 100. Una alumna quiere ser admitida en esta universidad y sabe que debe obtener mejores calificaciones que al menos el 70 % de los estudiantes que pasaron la prueba (sólo entra el 30 %). Calcula la nota de corte para entrar en dicha Universidad. (1,5 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,18$:

- a) Demuestra y calcula la probabilidad de que ocurran A o B . (0,5 pt)
- b) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(A|B)$ (0,75 pt)
- c) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (0,75 pt)
- d) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (0,5 pt)

a) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = 0,55 + 0,3 - 0,18 = 0,67$$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,3} = 0,6$

c) Por las leyes de Morgan $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0,18 = 0,82$$

d) ¿Son A y B independientes?

$B \text{ y } A \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

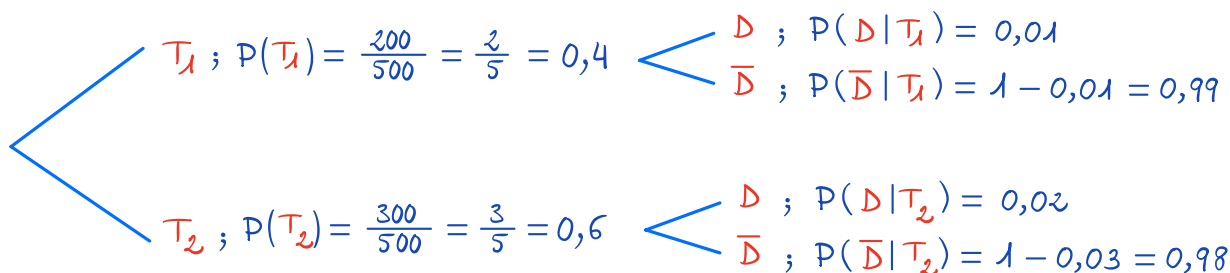
 $P(A \cap B) = 0,18$

$P(A) \cdot P(B) = 0,55 \cdot 0,3 = 0,165 \neq 0,18$ luego no son independientes. Son dependientes.

2. Una fábrica produce discos duros para ordenadores en dos turnos. En el primer turno, se producen 200 discos diarios y en el segundo 300. Por la experiencia pasada, se sabe que en el primer turno se produjo un 1 % de discos defectuosos y en el segundo un 2 % de discos defectuosos.

- a) Dibuja el diagrama de árbol completo (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
- b) Determina la probabilidad de que un disco elegido al azar sea defectuoso. (1 pt)
- c) Si un disco NO es defectuoso, calcula la probabilidad de que provenga del primer turno. (1 pt)

a) Árbol completo: Total de producción $200 + 300 = 500$ $D \equiv \text{Defectuoso}$



b) Probabilidad de que un tornillo sea defectuoso. Probabilidad total:

$$P(D) = P(T_1) \cdot P(D|T_1) + P(T_2) \cdot P(D|T_2)$$

$$P(D) = 0,4 \cdot 0,01 + 0,6 \cdot 0,02 = 0,016 = \frac{2}{125}$$

c) Teorema de Bayes: No defectuoso (condición). Primer turno.

$$P(T_1|\bar{D}) = \frac{P(T_1 \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(T_1) \cdot P(\bar{D}|T_1)}{1 - P(D)} = \frac{0,4 \cdot 0,99}{1 - 0,016} = \frac{0,396}{0,984} = 0,4024$$

3. En la elaboración de un producto se sabe que la probabilidad de que sea defectuoso es 0,2. Si se seleccionan al azar 8 unidades. Calcula la probabilidad de que:

a) exactamente 3 sean defectuosas.

(1 pt)

b) por lo menos 2 y como máximo 4 unidades sean defectuosas.

(1,5 pt)

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	Distribución binomial Combinaciones · (prob. éxito)^{nº éxitos} · (prob. fracaso)^{nº fracasos}
-------------------------------------	--

Se trata de un experimento binomial con $p = 0,2$ (llamamos éxito a que una unidad sea defectuosa).

$$B(n=8, p=0,2), q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8; \quad X \equiv \{ \text{Suceso } n^\circ \text{ unidades defectuosas} \}$$

a) Media $\mu = np = 8 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ unidades}; \quad X \sim B(8, 0,2)$

$k = n^\circ$ éxitos. Nos preguntan la probabilidad de 3 defectuosos y 5 no defectuosos.

$$P(X=3) = \binom{8}{3} \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^{8-3} = \frac{8!}{3!5!} \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^5$$

$$P(X=3) = 56 \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^5 = 0,1468$$

b) $P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$P(X=2) = \binom{8}{2} \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^{8-2} = \frac{8!}{2!6!} \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^6$$

$$P(X=2) = 28 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^6 = 0,2936$$

$$P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot (0,2)^4 \cdot (0,8)^{8-4} = \frac{8!}{4!4!} \cdot (0,2)^4 \cdot (0,8)^4$$

$$P(X=4) = 70 \cdot (0,2)^4 \cdot (0,8)^4 = 0,0459$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0,2936 + 0,1468 + 0,0459 = 0,4863$$

4. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm :

- a) Determina la probabilidad de que una persona tenga una estatura superior a 190 cm . (1 pt)
- b) Si se eligen al azar 50 personas, ¿cuántas tendrán una estatura comprendida entre 162 cm y 186 cm ? (1,5 pt)

Llamamos $X \equiv \{\text{Estatura}\}$, $\mu = 180 \text{ cm}$, $\sigma = 15 \text{ cm}$

Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(180, 15)$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$a) P(X > 190) = P\left(Z > \frac{190 - 180}{15}\right) = P(Z > 0,67) =$$

Tipificamos Redondeo a 2 decimales

$$1 - P(Z \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = \boxed{0,2514}$$

Tabla 0,7486

$$b) P(162 \leq X \leq 186) = P\left(\frac{162 - 180}{15} \leq Z \leq \frac{186 - 180}{15}\right) = P(-1,2 \leq Z \leq 0,4) =$$

Tipificamos Redondeo a 2 decimales Redondeo a 2 decimales

$$= P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -1,2) = P(Z \leq 0,4) - [1 - P(Z \leq 1,2)] =$$

Tabla 0,6554 Tabla 0,8849

$$= 0,6554 - 1 + 0,8849 = 0,5403$$

$$50 \text{ personas} \Rightarrow 50 \cdot 0,5403 \approx 27,015$$

27 ó 28 personas tendrán una estatura dentro del intervalo.