

PROBABILIDAD

Nota: En todos los ejercicios, justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas escritas con símbolos.

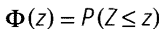
1. Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,75$:
 - a) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(A \cap B)$ (0,5 pt)
 - b) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(A|B)$ (0,75 pt)
 - c) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ (0,75 pt)
 - d) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (0,5 pt)
2. En una ciudad, el 35 % de los ciudadanos utiliza el metro al menos una vez al día, el 24 % usa el autobús y un 15 % usa ambos medios de transporte. Se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:
 - a) use el autobús si se sabe que coge el metro. (0,75 pt)
 - b) sabiendo que monta en metro, no utilice el autobús. (0,5 pt)
 - c) no utilice ni metro ni autobús. (0,75 pt)
3. Tres máquinas A , B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A produce 600 tornillos de los cuales el 1 % es defectuoso; la máquina B produce 300 y el 2 % es defectuoso; la máquina C produce 100, y de ellos el 3 % defectuoso.
 - a) Dibuja el diagrama de árbol con los datos completos. (0,5 pt)
En cada hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. Calcula la probabilidad:
 - b) de que sea defectuoso. (1 pt)
 - c) de que haya sido fabricado por la máquina C sabiendo que es defectuoso. (1 pt)
 - d) de que no sea defectuoso y no haya sido fabricado por la máquina B . (1 pt)
4. En un examen tipo test se debe responder a 8 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas, solo una de las cuales es correcta.
 - a) ¿Cuál es el valor esperado (media) de preguntas acertadas? (0,25 pt)
 - b) Calcula la probabilidad de que un estudiante acierte exactamente 4 preguntas. (0,75 pt)
 - c) Calcula la probabilidad de que un estudiante acierte más de 2 preguntas. (1 pt)

COMPLEMENTARIO: Se sabe que el gasto mensual en gas y electricidad de las familias de una determinada región sigue una distribución normal de media 90 € y desviación típica 30 €.

Calcula la probabilidad de que el gasto esté comprendido entre 70 € y 100 €. (1,5 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,75$:

- a) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(A \cap B)$ (0,5 pt)
- b) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(A|B)$ (0,75 pt)
- c) Demuestra y calcula la probabilidad: $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (0,75 pt)
- d) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (0,5 pt)

a) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,75 = 0,25$$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625 = \frac{5}{8}$

c) Por las leyes de Morgan $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

d) ¿Son A y B independientes?

$B \text{ y } A \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

 $P(A \cap B) = 0,25$

$P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 \neq 0,25$ luego no son independientes. Son dependientes.

2. En una ciudad, el 35 % de los ciudadanos utiliza el metro al menos una vez al día, el 24 % usa el autobús y un 15 % usa ambos medios de transporte. Se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) use el autobús si se sabe que coge el metro. (0,75 pt)
- b) sabiendo que monta en metro, no utilice el autobús. (0,5 pt)
- c) no utilice ni metro ni autobús. (0,75 pt)

$M \equiv$ Utiliza el metro ; $A \equiv$ Utiliza el autobús ; $P(A) = 0,24$; $P(M) = 0,35$

$$P(M \cap A) = 0,15 = P(A \cap M)$$

a) $P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0,15}{0,35} = 0,4286$

b) $P(\bar{A}|M) = \frac{P(\bar{A} \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M \cap \bar{A})}{P(M)} = \frac{P(M) - P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{0,35 - 0,15}{0,35} = 0,5714$

Método II: $P(\bar{A}|M) = 1 - P(A|M) = 1 - 0,4286 = 0,5714$

c) Por las leyes de Morgan $P(\bar{M} \cap \bar{A}) = P(\overline{M \cup A}) = 1 - P(M \cup A) = 1 - 0,44 = 0,56$

$$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,35 + 0,24 - 0,15 = 0,44$$

Método de la tabla de contingencia:

Consideramos a 100 ciudadanos.

Rellenamos la tabla con los datos y calculamos el resto de celdas. Con toda esta información calculamos las probabilidades.

	M	$\bar{M}$	
A	15		24
$\bar{A}$			
	35		100

 $\Rightarrow$

	M	$\bar{M}$	
A	15	9	24
$\bar{A}$	20	56	76
	35	65	100

3. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A produce 600 tornillos de los cuales el 1 % es defectuoso; la máquina B produce 300 y el 2 % es defectuoso; la máquina C produce 100, y de ellos el 3 % defectuoso.

a) Dibuja el diagrama de árbol con los datos completos.

(0,5 pt)

En cada hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. Calcula la probabilidad:

b) de que sea defectuoso.

(1 pt)

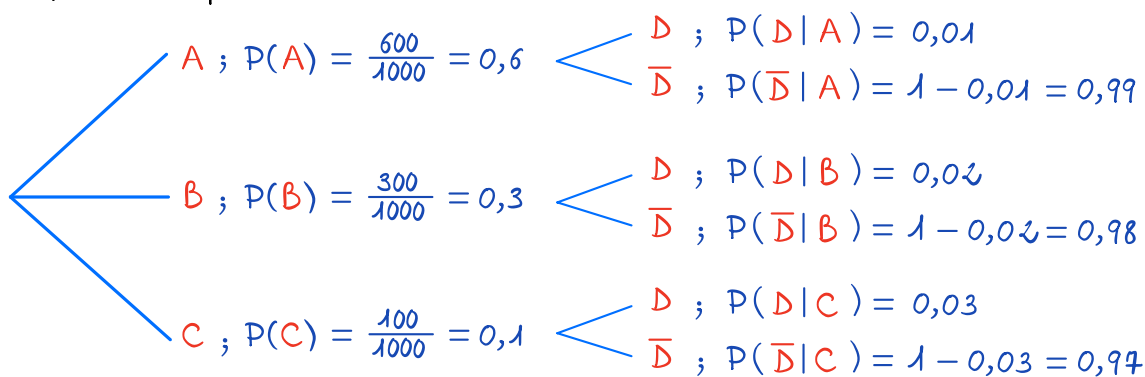
c) de que haya sido fabricado por la máquina C sabiendo que es defectuoso.

(1 pt)

d) de que no sea defectuoso y no haya sido fabricado por la máquina B.

(1 pt)

a) Árbol completo:



$D \equiv \text{Defectuoso}$

b) Probabilidad de que un tornillo sea defectuoso. Probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C)$$

$$P(D) = 0,6 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,03 = 0,015$$

c) Teorema de Bayes: $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P(D|C)}{P(D)} = \frac{0,1 \cdot 0,03}{0,015} = 0,2$

d) Leyes de Morgan . $P(\bar{D} \cap \bar{B}) = P(\overline{D \cup B}) = 1 - P(D \cup B) = 1 - 0,309 = 0,691$

$$P(D \cup B) = P(D) + P(B) - P(D \cap B) = P(D) + P(B) - P(B) \cdot P(D|B)$$

$$P(D \cup B) = 0,015 + 0,3 - 0,3 \cdot 0,02 = 0,309$$

Método II: $P(A \cap \bar{D}) + P(C \cap \bar{D}) = 0,6 \cdot 0,99 + 0,1 \cdot 0,97 = 0,691$

Regla del producto

4. En un examen tipo test se debe responder a 8 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas, solo una de las cuales es correcta.

- a) ¿Cuál es el valor esperado (media) de preguntas acertadas? (0,25 pt)
b) Calcula la probabilidad de que un estudiante acierte exactamente 4 preguntas. (0,75 pt)
c) Calcula la probabilidad de que un estudiante acierte más de 2 preguntas. (1 pt)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{Distribución binomial} \quad \left| \quad \text{Combinaciones} \cdot (\text{prob. éxito})^{n^{\circ} \text{ éxitos}} \cdot (\text{prob. fracaso})^{n^{\circ} \text{ fracasos}} \right.$$

Se trata de un experimento binomial con $p = \frac{1}{4} = 0,25$ (llamamos éxito a acertar la pregunta).

$B(n=8, p=0,25)$, $q = 1 - p = 1 - 0,25 = 0,75$; $X \equiv \{ \text{Suceso } n^{\circ} \text{ preguntas acertadas} \}$

a) Media $\mu = np = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \text{ preguntas}$; $X \sim B(8, 0,25)$

$k = n^{\circ} \text{ éxitos}$. Nos preguntan:

$$b) P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot (0,25)^4 \cdot (0,75)^{8-4} = \frac{8!}{4!4!} \cdot (0,25)^4 \cdot (0,75)^4$$

$$P(X=4) = 70 \cdot (0,25)^4 \cdot (0,75)^4 = 0,0865$$

$$c) P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$

$$P(X=0) = \binom{8}{0} \cdot (0,25)^0 \cdot (0,75)^{8-0} = \frac{8!}{0!8!} \cdot (0,25)^0 \cdot (0,75)^8 = 0,1001$$

$$P(X=1) = \binom{8}{1} \cdot (0,25)^1 \cdot (0,75)^{8-1} = \frac{8!}{1!7!} \cdot (0,25)^1 \cdot (0,75)^7 = 0,2670$$

$$P(X=2) = \binom{8}{2} \cdot (0,25)^2 \cdot (0,75)^{8-2} = \frac{8!}{2!6!} \cdot (0,25)^2 \cdot (0,75)^6 = 0,3115$$

$$P(X > 2) = 1 - [0,1001 + 0,2670 + 0,3115] = 1 - 0,7686 = 0,3214$$

COMPLEMENTARIO: Se sabe que el gasto mensual en gas y electricidad de las familias de una determinada región sigue una distribución normal de media 90 € y desviación típica 30 €.

Calcula la probabilidad de que el gasto esté comprendido entre 70 € y 100 €.

(1,5 pt)

Llamamos $X \equiv \{ \text{Gasto en } \text{€} \}$, $\mu = 90 \text{ €}$, $\sigma = 30 \text{ €}$

Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(90, 30)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$P(70 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{70 - 90}{30} \leq Z \leq \frac{100 - 90}{30}\right) = P\left(\underbrace{-0,666}_{\text{Redondeo a 2 decimales}} \leq Z \leq \underbrace{0,333}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}\right) =$$

Tipificamos

$$= P(Z \leq 0,33) - P(Z \leq -0,67) = P(Z \leq 0,33) - [1 - P(Z \leq 0,67)] =$$

Tabla 0,6293 Tabla 0,7486

$$= 0,6293 - 1 + 0,7486 = 0,3779$$