

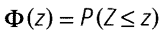
PROBABILIDAD

Nota: En todos los ejercicios, justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas escritas con símbolos.

1. Se sabe que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,75$.
 - a) Calcula la probabilidad de $P(A \cap B)$. (0,75 pt.)
 - b) Calcula la probabilidad de $P(A|B)$. (0,5 pt.)
 - c) ¿Son los sucesos A y B independientes? (0,5 pt.)
 - d) Calcula la probabilidad de $P(A \cup B)$. (0,75 pt.)
2. En una ciudad funcionan dos agencias de alquiler de coches. La agencia A controla el 60 % del mercado local y la empresa B el resto. El 9 % de los coches de la agencia A y el 20 % de los coches de la agencia B necesitan revisión mecánica.
 - a) Dibuja el **diagrama de árbol completo** (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
 - b) Calcula la **probabilidad de que un coche de alquiler necesite revisión mecánica**. (1 pt)
 - c) Si un coche de alquiler **NO necesita revisión mecánica**, calcula la **probabilidad de que pertenezca a la agencia A** . (1 pt)
3. Una moneda está trucada, de modo que la **probabilidad de obtener cara** es 0,6. Se lanza la moneda 8 veces:
 - a) Calcula la **probabilidad de obtener exactamente de 5 caras**. (0,75 pt)
 - b) Calcula la **probabilidad de obtener menos de 2 caras**. (1,25 pt)
 - c) Calcula la **media (valor esperado)** y la **desviación típica** de esta distribución. (0,5 pt)
4. Las puntuaciones de un test siguen una **distribución normal** de **media 6** y **desviación típica 2**. El test se pasa a un grupo de 1000 **estudiantes**.
 - a) ¿**Cuántos estudiantes** obtendrán una **puntuación superior a 8,5** ? (1 pt)
 - b) ¿**Cuántos estudiantes** lograrán una puntuación entre 4,25 y 7,25 ? (1,5 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Se sabe que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,75$.

- a) Calcula la probabilidad de $P(A \cap B)$.
- b) Calcula la probabilidad de $P(A|B)$.
- c) ¿Son los sucesos A y B **independientes**?
- d) Calcula la probabilidad de $P(A \cup B)$.

a) Por las leyes de Morgan

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0,75 = 0,25 = \frac{1}{4}$$

$$b) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625 = \frac{5}{8}$$

c) ¿ Son A y B independientes ?

$B \text{ y } A \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = 0,25$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 \neq 0,25 \text{ luego no son independientes. Son dependientes.}$$

d) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,25 = 0,65 = \frac{13}{20}$$

2. En una ciudad funcionan dos agencias de alquiler de coches. La agencia A controla el 60% del mercado local y la empresa B el resto. El 9% de los coches de la agencia A y el 20% de los coches de la agencia B necesitan revisión mecánica.

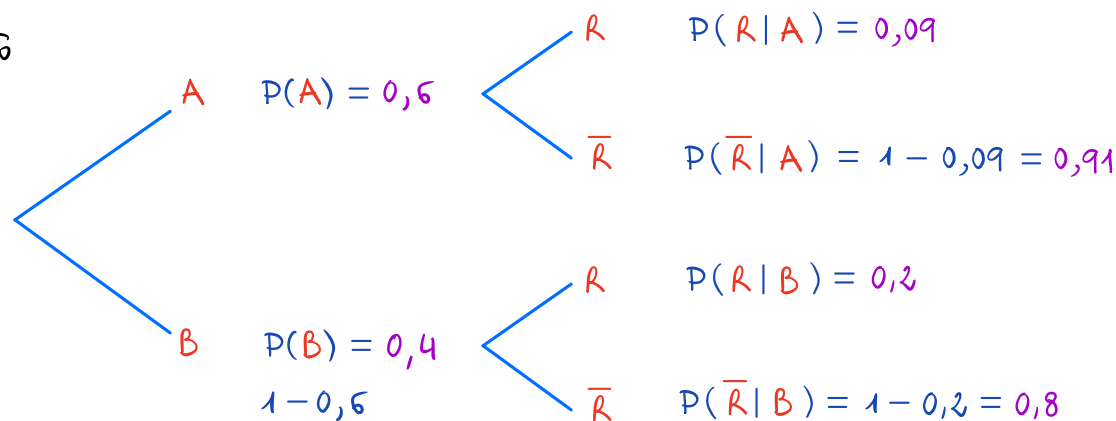
- Dibuja el **diagrama de árbol completo** (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
- Calcula la **probabilidad de que un coche de alquiler necesite revisión mecánica**. (1 pt)
- Si un coche de alquiler **NO necesita revisión mecánica**, calcula la **probabilidad de que pertenezca a la agencia A** . (1 pt)

Sean los sucesos $R = \{ \text{necesita revisión} \}$; $A = \{ \text{Agencia A} \}$; $B = \{ \text{Agencia B} \}$;

Construimos un diagrama en árbol:

$$P(A) = 0,6 \quad , \quad P(R|A) = 0,09 \quad , \quad P(R|B) = 0,2 \quad , \quad P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$$

a) Árbol completo



b) Probabilidad de que un coche necesite revisión. Probabilidad total:

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) = P(A) \cdot P(R|A) + P(B) \cdot P(R|B)$$

$$P(R) = 0,6 \cdot 0,09 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,134$$

c) Probabilidad de que sea de la agencia A sabiendo que no necesita revisión. Teorema de Bayes:

$$P(A|\bar{R}) = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{R}|A)}{1 - P(R)} = \frac{0,6 \cdot 0,91}{0,866} \approx 0,6304$$

$$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0,134 = 0,866$$

3. Una moneda está trucada, de modo que la **probabilidad de obtener cara** es 0,6. Se lanza la moneda 8 veces:

- a) Calcula la **probabilidad** de obtener **exactamente de 5 caras**. (0,75 pt)
- b) Calcula la **probabilidad** de obtener **menos de 2 caras**. (1,25 pt)
- c) Calcula la **media (valor esperado)** y la **desviación típica** de esta distribución. (0,5 pt)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \begin{array}{l} \text{Distribución} \\ \text{binomial} \end{array} \quad \left| \quad \text{Combinaciones} \cdot (\text{prob. éxito})^{n^{\circ} \text{ éxitos}} \cdot (\text{prob. fracaso})^{n^{\circ} \text{ fracasos}} \right.$$

Se trata de un experimento binomial con $p=0,6$ (llamamos éxito a salir cara).

$B(n=8, p=0,6)$, $q=1-p=1-0,6=0,4$; $X \equiv \{\text{Suceso salir cara}\}$

$k = n^{\circ}$ éxitos. Nos preguntan:

$$a) \quad P(X=5) = \binom{8}{5} \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^{8-5} = \frac{8!}{5!3!} \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^3$$

$$P(X=5) = 56 \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^3 = 0,2787$$

$$b) \quad P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$P(X=0) = \binom{8}{0} \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^{8-0} = \frac{8!}{0!8!} \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^8$$

$$P(X=0) = 1 \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^8 = 0,0004$$

$$P(X=1) = \binom{8}{1} \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^{8-1} = \frac{8!}{1!7!} \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^7$$

$$P(X=1) = 8 \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^7 = 0,0079$$

$$P(X < 2) = 0,0004 + 0,0079 = 0,0083$$

$$c) \quad \text{Media} \quad \mu = np = 8 \cdot 0,6 = 4,8 \text{ caras}$$

$$\text{Desviación típica} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0,6 \cdot 0,4} \simeq 1,386$$

4. Las puntuaciones de un test siguen una **distribución normal** de **media 6** y **desviación típica 2**. El test se pasa a un grupo de 1000 **estudiantes**.

a) ¿**Cuántos estudiantes** obtendrán una **puntuación superior a 8,5** ? (1 pt)

b) ¿**Cuántos estudiantes** lograrán una puntuación entre 4,25 y 7,25 ? (1,5 pt)

Llamamos $X \equiv \{ \text{puntuación del test} \}$, $\mu = 6$, $\sigma = 2$, $n = 1.000$ estudiantes

Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(6, 2)$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 8,5) &= P\left(Z > \frac{8,5 - 6}{2}\right) = P(Z > 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ &\quad \text{Tipificamos} \quad \quad \text{Redondeo a} \quad \quad \text{Tabla } 0,8944 \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad 2 \text{ decimales} \\ &= 1 - 0,8944 = 0,1056 \end{aligned}$$

$1.000 \cdot 0,1056 = 105,6 \Rightarrow 105 \text{ ó } 106$ estudiantes obtendrán más de 8,5 en el test.

$$\begin{aligned} \text{b) } P(4,25 \leq X \leq 7,25) &= P\left(\frac{4,25 - 6}{2} \leq Z \leq \frac{7,25 - 6}{2}\right) = P\left(\underbrace{-0,875}_{\text{Redondeo a 2 decimales}} \leq Z \leq \underbrace{0,625}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}\right) = \\ &\quad \quad \quad \nearrow \\ &\quad \quad \quad \text{Tipificamos} \\ &= P(Z \leq 0,63) - P(Z \leq -0,88) = P(Z \leq 0,63) - [1 - P(Z \leq 0,88)] = \\ &\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ &\quad \quad \quad \text{Tabla } 0,7357 \quad \quad \quad \text{Tabla } 0,8106 \\ &= 0,7357 - 1 + 0,8106 = 0,5463 \end{aligned}$$

$1.000 \cdot 0,5463 = 546,3 \Rightarrow 546 \text{ ó } 547$ estudiantes obtendrán una puntuación entre 4,25 y 7,25.