

PROBABILIDAD

Nota: En todos los ejercicios, justifica todos los pasos con las fórmulas oportunas escritas con símbolos.

1. Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ y $P(B|A) = \frac{1}{3}$.
 - a) Calcula la probabilidad de $P(A \cap B)$. (0,75 pt.)
 - b) Calcula la probabilidad de $P(A \cup B)$. (0,5 pt.)
 - c) ¿Son los sucesos A y B independientes? (0,5 pt.)
 - d) Calcula la probabilidad de $P(\overline{A} \cup \overline{B})$. (0,75 pt.)

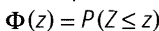
2. Para un campamento de verano se ha **seleccionado** un 40 % de las solicitudes presentadas. Un 10 % de las solicitudes **seleccionadas** corresponden a **familias numerosas** y un 25 % de las **no seleccionadas** también son **familias numerosas**.
 - a) Dibuja el **diagrama de árbol completo** (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
 - b) Calcula el porcentaje de **familias numerosas** que han presentado la solicitud. (1 pt)
 - c) Se sabe que una determinada solicitud **no corresponde a una familia numerosa**. Determina la **probabilidad de que haya sido seleccionada** para participar en el campamento. (1 pt)

3. La **probabilidad** de que en una fábrica se produzca **un accidente en una semana** es 0,15. Si se eligen al azar 7 semanas:
 - a) Calcula la **probabilidad** de que se produzcan **exactamente de 3 accidentes**. (0,75 pt)
 - b) Calcula la **probabilidad** de que se produzcan **menos de 2 accidentes**. (1,25 pt)
 - c) Calcula la **media (valor esperado)** y la **desviación típica** de esta distribución. (0,5 pt)

4. Según un estudio, el **número de horas prácticas necesarias** para la obtención del permiso de conducir, sigue una distribución normal de **media 24 h** y **desviación típica 3 h**. En una autoescuela hay 50 **estudiantes**.
 - a) ¿Qué **probabilidad** hay de obtener el permiso de conducir con **20 horas de prácticas o menos**?
¿**Cuántos estudiantes** estimas que lo lograrán? (1 pt)
 - b) ¿Qué **probabilidad** hay de obtener el permiso de conducir haciendo **entre 21 y 27 horas** de prácticas? ¿**Cuántos estudiantes** estimas que lo lograrán? (1,5 pt)

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ y $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

- a) Calcula la probabilidad de $P(A \cap B)$.
- b) Calcula la probabilidad de $P(A \cup B)$.
- c) ¿Son los sucesos A y B **independientes**?
- d) Calcula la probabilidad de $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

a) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = 0,2$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$

c) ¿ Son A y B independientes ?

$B \text{ y } A \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) = 0,2$

$P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \neq 0,2$ luego no son independientes. Son dependientes.

d) Por las leyes de Morgan

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8 = \frac{4}{5}$$

2. Para un campamento de verano se ha **seleccionado** un 40 % de las solicitudes presentadas. Un 10 % de las solicitudes **seleccionadas** corresponden a **familias numerosas** y un 25 % de las **no seleccionadas** también son **familias numerosas**.

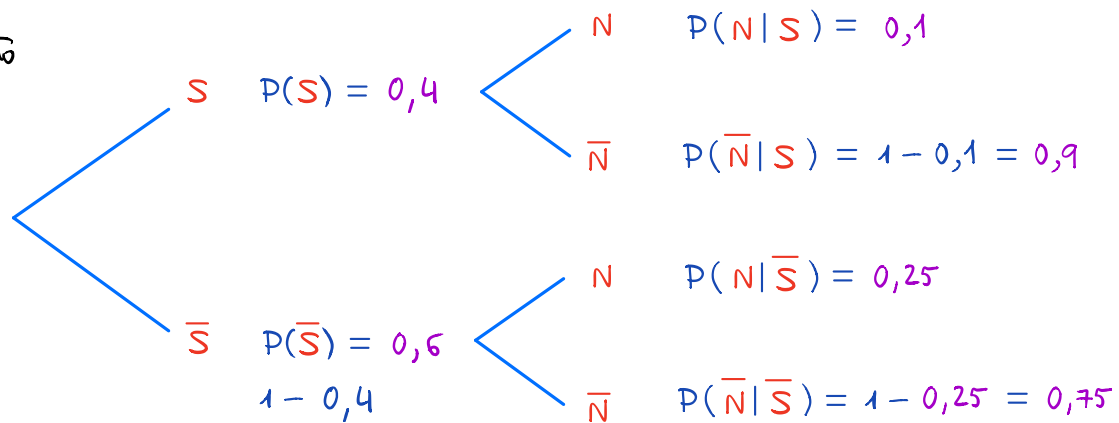
- Dibuja el **diagrama de árbol completo** (incluyendo las fórmulas). (0,5 pt)
- Calcula el porcentaje de **familias numerosas** que han presentado la solicitud. (1 pt)
- Se sabe que una determinada solicitud **no corresponde a una familia numerosa**. Determina la **probabilidad de que haya sido seleccionada** para participar en el campamento. (1 pt)

Sean los sucesos $S = \{ \text{la familia es seleccionada} \}$; $N = \{ \text{la familia es numerosa} \}$

Construimos un **diagrama en árbol**:

$$P(S) = 0,4 \quad , \quad P(N|S) = 0,1 \quad , \quad P(N|\bar{S}) = 0,25 \quad , \quad P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,4 = 0,6$$

a) Árbol completo



b) Porcentaje de familias numerosas . **Probabilidad total**:

$$P(N) = P(S \cap N) + P(\bar{S} \cap N) = P(S) \cdot P(N|S) + P(\bar{S}) \cdot P(N|\bar{S})$$

$$P(N) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,25 = 0,19 \Rightarrow 19\% \text{ de las familias son numerosas.}$$

c) Probabilidad de familia seleccionada sabiendo que no es numerosa . **Teorema de Bayes**:

$$P(S|\bar{N}) = \frac{P(S \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{P(S) \cdot P(\bar{N}|S)}{1 - P(N)} = \frac{0,4 \cdot 0,9}{0,81} = \frac{4}{9} \simeq 0,4444$$

$$P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0,19 = 0,81$$

3. La **probabilidad** de que en una fábrica se produzca **un accidente en una semana** es 0,15. Si se eligen al azar 7 semanas:

- a) Calcula la **probabilidad** de que se produzcan **exactamente de 3 accidentes**. (0,75 pt)
- b) Calcula la **probabilidad** de que se produzcan **menos de 2 accidentes**. (1,25 pt)
- c) Calcula la **media (valor esperado)** y la **desviación típica** de esta distribución. (0,5 pt)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Distribución
binomial

Combinaciones · (prob. éxito)^{nº éxitos} · (prob. fracaso)^{nº fracasos}

Se trata de un experimento binomial con $p = 0,15$ (llamamos éxito a un accidente).

$B(n=7, p=0,15)$, $q = 1 - p = 1 - 0,15 = 0,85$; $X \equiv \{ \text{Suceso producirse un accidente} \}$

$k = \text{nº éxitos}$. Nos preguntan:

$$a) P(X=3) = \binom{7}{3} \cdot (0,15)^3 \cdot (0,85)^{7-3} = \frac{7!}{3!4!} \cdot (0,15)^3 \cdot (0,85)^4$$

$$P(X=3) = 35 \cdot (0,15)^3 \cdot (0,85)^4 = 0,0617$$

$$b) P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$P(X=0) = \binom{7}{0} \cdot (0,15)^0 \cdot (0,85)^{7-0} = \frac{7!}{0!7!} \cdot (0,15)^0 \cdot (0,85)^7$$

$$P(X=0) = 1 \cdot (0,15)^0 \cdot (0,85)^7 = 0,3206$$

$$P(X=1) = \binom{7}{1} \cdot (0,15)^1 \cdot (0,85)^{7-1} = \frac{7!}{1!6!} \cdot (0,15)^1 \cdot (0,85)^6$$

$$P(X=1) = 7 \cdot (0,15)^1 \cdot (0,85)^6 = 0,3960$$

$$P(X < 2) = 0,3206 + 0,3960 = 0,7166$$

$$c) \text{ Media } \mu = np = 7 \cdot 0,15 = 1,05 \text{ accidentes}$$

$$\text{Desviación típica } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{7 \cdot 0,15 \cdot 0,85} \simeq 0,94$$

4. Según un estudio, el **número de horas prácticas necesarias** para la obtención del permiso de conducir, sigue una distribución normal de **media 24 h** y **desviación típica 3 h**. En una autoescuela hay 50 **estudiantes**.

- a) ¿Qué **probabilidad** hay de obtener el permiso de conducir con 20 **horas de prácticas o menos**?
¿**Cuántos estudiantes** estimas que lo lograrán? (1 pt)
- b) ¿Qué **probabilidad** hay de obtener el permiso de conducir haciendo **entre 21 y 27 horas** de prácticas? ¿**Cuántos estudiantes** estimas que lo lograrán? (1,5 pt)

Llamamos $X \equiv \{ \text{nº horas de prácticas} \}$, $\mu = 24 \text{ h}$, $\sigma = 3 \text{ h}$, $n = 50$ estudiantes

Sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(24, 3)$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \leq 20) &= P\left(Z \leq \underbrace{\frac{20-24}{3}}_{\substack{\text{Redondeo a} \\ 2 \text{ decimales}}}\right) = P(Z \leq -1,33) = 1 - P\left(Z \leq \underbrace{1,33}_{\substack{\text{Tabla} \\ 0,9082}}\right) = \\ &\quad \uparrow \text{Tipificamos} \\ &= 1 - 0,9082 = 0,0918 \end{aligned}$$

$50 \cdot 0,0918 = 4,59 \Rightarrow 4 \text{ ó } 5$ estudiantes obtendrán el permiso con un máximo de 20 prácticas.

$$\begin{aligned} \text{b) } P(21 \leq X \leq 27) &= P\left(\underbrace{\frac{21-24}{3}}_{\substack{\text{Redondeo a} \\ 2 \text{ decimales}}} \leq Z \leq \underbrace{\frac{27-24}{3}}_{\substack{\text{Redondeo a} \\ 2 \text{ decimales}}}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &\quad \nearrow \text{Tipificamos} \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= 2 \cdot \underbrace{P(Z \leq 1)}_{\substack{\text{Tabla} \\ 0,8413}} - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826 \end{aligned}$$

$50 \cdot 0,6826 = 34,13 \Rightarrow 34 \text{ ó } 35$ estudiantes obtendrán el permiso realizando entre 21 y 27 prácticas.