

**20.** De una muestra aleatoria de 2100 personas de una población hay 630 que leen un determinado diario. Calcular el intervalo de confianza para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 99 %

**Solución:**

La proporción de la muestra es  $\hat{p} = \frac{630}{2100} = 0,30$

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left( \hat{p} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right)$$

siendo  $\hat{p}$  la proporción de la muestra,  $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ ;  $n$ , el tamaño muestral y  $Z_{\alpha/2}$  el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de  $1 - \alpha$ .

En nuestro caso, para el 99 % de confianza (significación 0,01),  $Z_{\alpha/2} = 2,575$ ;  $\hat{p} = 0,30$ ,  $\hat{q} = 0,70$ , y  $n = 2100$ . Luego, el intervalo de confianza será:

$$\begin{aligned} & \left( 0,30 - 2,575 \sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{2100}}, 0,30 + 2,575 \sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{2100}} \right) = \\ & = (0,30 - 0,02575, 0,30 + 0,02575) \approx (0,274, 0,326) \end{aligned}$$

NOTA: Si se desea ser más exigente, los parámetros  $p$  y  $q$  podrían suponerse iguales,  $p = q = 0,50$ . Así se obtendría:

$$\left( 0,30 - 2,575 \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{2100}}, 0,30 + 2,575 \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{2100}} \right) \approx (0,272, 0,328)$$

21. En una ciudad residen 1250 familias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 20 % de ellas y se les preguntó si disponían de gas ciudad en su vivienda. Sabiendo que todas las familias seleccionadas respondieron y que se obtuvo un total de 75 respuestas afirmativas, se pide:

a) ¿Qué estimación puntual podríamos dar para el porcentaje de familias de esa ciudad que disponen de gas ciudad en su vivienda?.

b) ¿Qué error máximo cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 95 %?

Justificar las respuestas.

**Solución:**

El tamaño muestral fue de  $1250 \cdot 0,20 = 250$  familias.

La proporción de familias con gas natural en la muestra es  $\frac{75}{250} = 0,30$ , el 30 %.

a) Puede afirmarse que el porcentaje de familias con gas natural es del 30 %.

b) El error admitido E, viene dado por  $E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$ , siendo:

- $p$  la proporción de familias con gas natural y  $q = 1 - p \rightarrow p = 0,30$ ,  $q = 0,70$
- $n$  el tamaño muestral  $\rightarrow n = 250$
- $Z_{\alpha/2}$  el valor de la variable normal correspondiente a una confianza  $1 - \alpha \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$\text{Por tanto, } E = 1,96 \sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{250}} = 1,96 \cdot 0,029 = 0,057$$

Se puede cometer un error máximo del 5,7 %. Esto es, el porcentaje de familias con gas natural pertenece al intervalo  $(30 - 5,7, 30 + 5,7)$ : estará entre el 24,3 % y el 35,7 %

Si somos más exigentes y suponemos que al desconocer la proporción de la población hay que tomar  $p = q = 0,5$ , el error que se asume es,

$$E = 1,96 \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{250}} = 1,96 \cdot 0,0316 \approx 0,062$$

Cometeríamos un error máximo del 6,2 %.

22. En cierta cadena de centros comerciales trabajan 150 personas en el departamento de personal, 450 en el departamento de ventas, 200 en el departamento de contabilidad y 100 en el departamento de atención al cliente. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores.

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos utilizar para la selección de la muestra si queremos que incluya a trabajadores de los cuatro departamentos mencionados?

b) ¿Qué número de trabajadores tendríamos que seleccionar en cada departamento atendiendo a un criterio de proporcionalidad?

Justificar las respuestas

**Solución:**

a) Podría hacerse un muestreo aleatorio estratificado, eligiendo de cada grupo de trabajadores un número proporcional a su tamaño.

b) Hay que repartir proporcionalmente 180 entre 150, 450, 200 y 100, que son el número de trabajadores de los departamentos de personal, ventas, contabilidad y atención al cliente, respectivamente.

El total, el número de trabajadores de la empresa es 900; como el tamaño muestral es 180 habrá que elegir 1 trabajador de cada 5. Por tanto, se elegirán:

30 del departamento de personal

90 del departamento de ventas

40 del departamento de contabilidad y

20 del departamento de atención al cliente.

**23.** En una piscifactoría, se inició un cultivo con 90 ejemplares, de los cuales 64 llegaron a la edad adulta. De los que llegaron a la edad adulta, el peso medio fue de 3,1 kilos con una desviación típica de medio kilo.

a) Obtener un intervalo de confianza para la proporción de ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 90%.

b) Obtener un intervalo de confianza para el peso medio que alcanzan los ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 95%.

**Solución:**

a) El intervalo de confianza es:  $\left( \hat{p} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right)$

En este caso, para el 90 % de confianza,  $Z_{\alpha/2} = 1,645$ ,  $\hat{p} = \frac{64}{90} = 0,7111$ ,  $\hat{q} = 0,2889$  y  $n = 90$ . Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left( 0,7111 - 1,645 \sqrt{\frac{0,7111 \cdot 0,2889}{90}}, 0,7111 + 1,645 \sqrt{\frac{0,7111 \cdot 0,2889}{90}} \right) = (0,6325, 0,7897)$$

b) El intervalo de confianza de la media poblacional es:  $\left( \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Para  $\bar{x} = 3,1$ ,  $\sigma = 0,5$ ,  $n = 64$  y, para el 95 % de confianza,  $Z_{\alpha/2} = 1,96$ , se tendrá:

$$\left( 3,1 - 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{64}}, 3,1 + 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{64}} \right) = (2,9775, 3,2225)$$

**24.** El Ministerio de Educación y Cultura desea conocer el interés de los padres por la introducción de la primera Lengua Extranjera en el Primer Curso de Primaria. Encuestados 1024 padres elegidos al azar, el 80% está a favor. ¿Cuál es el intervalo de confianza para el porcentaje de los padres que están a favor de esta medida, con un nivel de confianza del 0,99?

**Solución:**

El intervalo de confianza para la proporción es:  $\left( p - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right)$

En este caso: para el 99% de confianza,  $Z_{\alpha/2} = 2,575$ ;  $p = 0,8$ ;  $q = 0,2$ ; y  $n = 1024$ . Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left( 0,8 - 2,575 \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{1024}}, 0,8 + 2,575 \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{1024}} \right) = (0,768, 0,832)$$

NOTA: Si se desea más seguridad, puede suponerse que la proporción de la población es  $p = 0,5$ . Así se obtiene el intervalo (0,76, 0,84)

25. Se hizo una encuesta a 325 personas mayores de 16 años y se encontró que 120 iban al teatro regularmente:

a) Halla, con un nivel de confianza del 94 %, un intervalo para estudiar la proporción de los ciudadanos que van al teatro regularmente.

b) En las mismas condiciones del apartado anterior, se realiza la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01. ¿Cuál sería el tamaño de la muestra?

**Solución:**

a) El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left( \hat{p} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right)$$

siendo  $\hat{p}$  la proporción de la muestra,  $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ ;  $n$ , el tamaño muestral y  $Z_{\alpha/2}$  el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de  $1 - \alpha$ .

En este caso, para el 94 % de confianza,  $Z_{\alpha/2} = 2,17$ ,  $\hat{p} = \frac{120}{325} = 0,37$ ,  $\hat{q} = 0,63$ , y  $n = 325$ .

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left( 0,37 - 2,17 \sqrt{\frac{0,37 \cdot 0,63}{325}}, 0,37 + 2,17 \sqrt{\frac{0,37 \cdot 0,63}{325}} \right) = (0,312, 0,428)$$

b) El error admitido  $E$ , viene dado por  $E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Rightarrow n = (Z_{\alpha/2})^2 \frac{\hat{p}\hat{q}}{E^2}$

Luego:  $n = 2,17^2 \frac{0,37 \cdot 0,63}{0,01^2} = 10976,4$

El tamaño muestral debe ser de  $n > 10976$ .

26. Preguntadas 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, sólo 40 han contestado que sí. Encuentre un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana.

**Solución:**

Intervalo de confianza:  $\left( p - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right)$

En este caso: para el 99% de confianza,  $Z_{\alpha/2} = 2,575$ ;  $p = 40/100 = 0,4$ ;  $q = 0,60$ ; y  $n = 100$ .

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left( 0,4 - 2,575 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}}, 0,4 + 2,575 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} \right) = (0,274, 0,526)$$

27. De una muestra de 400 jóvenes españoles de 25 años, elegidos al azar, sólo 60 no vivían con sus padres. Determine un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95 %, para el porcentaje de los jóvenes españoles que no viven con sus padres a los 25 años.

**Solución:**

La proporción muestral de jóvenes que no vivían con sus padres era de  $60/400 = 0,15$

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left( p - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right)$$

siendo  $p$  la proporción de la muestra,  $q = 1 - p$ ;  $n$ , el tamaño muestral y  $Z_{\alpha/2}$  el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de  $1 - \alpha$ .

En este caso:

$$p = 0,15; q = 0,85; n = 400; Z_{\alpha/2} = 1,96$$

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\begin{aligned} \left( 0,15 - 1,96 \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{400}}, 0,15 + 1,96 \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{400}} \right) = \\ = (0,15 - 0,035, 0,15 + 0,035) = (0,115, 0,185) \end{aligned}$$

EL porcentaje de la población de jóvenes de 25 años que no vive con sus padres, está entre el 11,5 % y el 18,5 %.