

1. Calcula la **derivada** de la función: $f(x) = 5^x + \frac{e^{2x}}{4}$ (0,5 pt.)
2. Halla la **ecuación de la recta tangente** a la función $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x}$ en $x = 3$. (1 pt.)
3. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por el **punto** $P(0,2)$ y tiene un **extremo local** en el **punto** $Q(-1,5)$. Obtén el **valor** de a, b y c . Comprueba qué **tipo de extremo** hay en Q . (1,5 pt.)

4. Sea la función definida a trozos:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 1$. (1,5 pt.)

5. Sea la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$.
Calcula los intervalos de **curvatura**, los **puntos de inflexión** y sus **coordenadas**. (1,25 pt.)

6. Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Calcula el **dominio**.
Calcula los intervalos de **monotonía**, los **extremos** relativos y sus **coordenadas**. (1,25 pt.)

7. Una empresa mide el número de productos vendidos (en **cientos de unidades**) durante 8 **años**. La función $N(t)$ que describe el **número de unidades vendidas** es:

$$N(t) = \begin{cases} 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 3 & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ -3 \cdot t + 31 & \text{si } 4 < t \leq 8 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en años desde comienzo.}$$

- a) Estudie en qué **períodos** se ha producido un **crecimiento** / **decrecimiento** de la cantidad de unidades vendidas. (1,5 pt.)
- b) ¿Cuáles son las cantidades **máxima** y **mínima** de unidades vendidas en 8 años? (0,5 pt.)
- c) **Esboza la gráfica** de la **función** teniendo en cuenta los apartados anteriores. (0,5 pt.)
- d) En qué momentos los productos vendidos están **por debajo de 300 unidades**? (0,5 pt.)

1. Calcula la **derivada** de la función: $f(x) = 5^x + \frac{e^{2x}}{4}$

$$\Rightarrow f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 + \frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \boxed{5^x \cdot \ln 5 + \frac{1}{2} \cdot e^{2x}}$$

2. Halla la **ecuación de la recta tangente** a la función $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x}$ en $x = 3$.

Recta tangente en $x_0 = 3$

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad \text{Ecuación punto-pendiente}$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x} \Rightarrow f(3) = \sqrt{2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3} = 3$$

$$f'(x) = \frac{4x - 3}{2 \cdot \sqrt{2x^2 - 3x}} \Rightarrow$$

$$f'(3) = \frac{4 \cdot 3 - 3}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$y - 3 = \frac{3}{2} \cdot (x - 3) \Rightarrow$$

$$\boxed{y - 3 = \frac{3}{2} \cdot (x - 3)} \quad \text{Recta tangente}$$

3. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por el **punto** $P(0,2)$ y tiene un **extremo local** en el **punto** $Q(-1,5)$. Obtén el **valor** de a, b y c . Comprueba qué **tipo de extremo** hay en Q . (1,5 pt.)

$$f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

Para que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un extremo en $(-1,1)$ debe pasar por el punto y verificar la **condición de extremo**: $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ($c = 2$)

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 5 \text{ Punto } Q \\ f'(-1) = 0 \text{ Condición de extremo} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 2 = 5 \Rightarrow \\ \boxed{a - b = 3} \quad [1] \end{array}$$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(-1) = 2a(-1) + b = 0 \Rightarrow \boxed{-2a + b = 0} \quad [2]$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} a - b = 3 \\ -2a + b = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando} \Rightarrow -a = 3 \Rightarrow \\ \boxed{a = -3} \end{array}$$

$$\Rightarrow b = a - 3 = -3 - 3 \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

Con los valores calculados anteriormente la función queda $\boxed{f(x) = -3x^2 - 6x + 2}$

$$\text{Tipo de extremo: } f''(x) = 2a = 2(-3) < 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ es un máximo local}}$$

También se podría resolver utilizando el método de la 1ª derivada.

4. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 1$.

Condición de continuidad $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Condición de derivabilidad $\Rightarrow f'(a^-) = f'(a^+)$

La función $f(x)$ debe ser continua en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx + 2 = a + b + 2 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{x+1} = 2$$

$$a + b + 2 = 2 \Rightarrow a + b = 0 \quad [1]$$

Condición de continuidad

La función $f(x)$ debe ser derivable en $x=1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{-4}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

No se pone = por si no hay solución y por que depende del valor de 'a'

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$2ax + b = \frac{-4}{(x+1)^2} \text{ en } x=1$$

$$2a + b = -1 \quad [2] \quad \text{Condición de derivabilidad}$$

Sistema $\left\{ \begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a + b = -1 \end{array} \right\}$ Restamos $\Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -a = 1 \Rightarrow b = 1$

Solución: Si $a = -1$ y $b = 1$, $f(x)$ es derivable en $x=1$

5. Sea la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Calcula los intervalos de **curvatura**, los **puntos de inflexión** y sus **coordenadas**.

Dominio: $y = -x^3 + 3x^2 + 2$, $Df(x) = \mathbb{R}$, luego no tiene puntos críticos para el dominio.

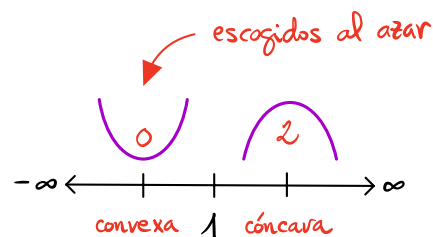
Curvatura $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

$y' = -3x^2 + 6x \Rightarrow y'' = -6x + 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$; posible punto de inflexión P.I.

La curvatura se estudia en los intervalos entre los P.I. y los puntos críticos

Evaluamos puntos al azar en cada intervalo } $\Rightarrow$

$y''(0) > 0$  convexa
 $y''(2) < 0$  cóncava



En $x = 1$ cambia la curvatura, luego es un P.I. confirmado.

Convexa  en $(-\infty, 1)$
Cóncava  en $(1, \infty)$

Coordenadas: $y = -x^3 + 3x^2 + 2$

$y(1) = -1 + 3 + 2 = 4$

Punto de inflexión $(1, 4)$

6. Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Calcula el **dominio**.

Calcula los intervalos de **monotonía**, los **extremos** relativos y sus **coordenadas**.

a) $y = \frac{x-1}{x^2}$, $x^2=0 \Rightarrow x=0$, $Df(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, luego $x=0$ es un punto crítico del dominio.

$y' = 0$ Condición de extremo. $y' = \frac{1 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4}$

$y' = \frac{2x - x^2}{x^4} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0$ $\begin{cases} x=0 & \text{Es una A.V., no un posible extremo} \\ x=2 & \text{Posibles extremo} \end{cases}$

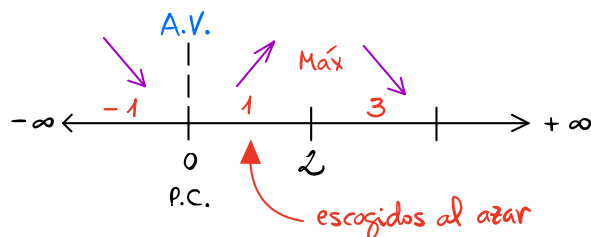
se cancela el denominador

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

Hay un punto crítico en $x = \frac{1}{2}$. Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{x(2-x)}{x^4}$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo



$y'(-1) = \frac{-}{+} < 0$
 $y'(1) = \frac{+}{+} > 0$
 $y'(3) = \frac{-}{+} < 0$

Crece $(0, 2)$
 Decrece $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Intervalos de Monotonía

En $x=2$ hay un máximo relativo

Coordenadas de los extremos: $y = \frac{x-1}{x^2}$,

Si $x=2$, $y(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ máximo relativo $(2, \frac{1}{4})$ Extremos locales

7. Una empresa mide el número de productos vendidos (en **cientos de unidades**) durante 8 años. La función $N(t)$ que describe el **número de unidades vendidas** es:

$$N(t) = \begin{cases} 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 3 & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ -3 \cdot t + 31 & \text{si } 4 < t \leq 8 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en años desde comienzo.}$$

- a) Estudie en qué **períodos** se ha producido un **crecimiento** / **decrecimiento** de la cantidad de unidades vendidas. (1,5 pt.)
- b) ¿Cuáles son las cantidades **máxima** y **mínima** de unidades vendidas en 8 años? (0,5 pt.)
- c) **Esboza** la **gráfica** de la **función** teniendo en cuenta los apartados anteriores. (0,5 pt.)
- d) En qué momentos los productos vendidos están **por debajo de 300 unidades**? (0,5 pt.)

a) y b) Monotonía y extremos absolutos de la función $N(t)$. $DN(t) = [0, 8]$ Son polinomios.

Trozo 1 $N(t) = 2t^2 - 4t + 3 \quad [0, 4]$

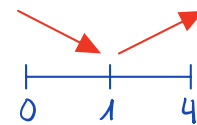
$N'(t) = 4t - 4 = 0$, condición de extremo $\Rightarrow t = 1 \in [0, 4]$ posible extremo

$N''(t) = 4 > 0 \Rightarrow t = 1$ es un **mínimo local**

$N(0) = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$;

$N(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1$; es un **mínimo local**

$N(4) = 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 19$;



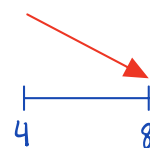
Trozo 2 $N(t) = -3t + 31 \quad (4, 8]$

$N'(t) = -3 \neq 0$, condición de extremo $\Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay extremos.

$N'(t) = -3 < 0 \Rightarrow$ la función **decrece** todo el tiempo

$N(4^-) = \lim_{t \rightarrow 4^-} -3t + 31 = 19$; es continua en $t = 4$

$N(8) = -3 \cdot 8 + 31 = 7$



Las unidades vendidas aumentan en el período $(1, 4]$ años.

Las unidades vendidas disminuyen en el período $[0, 1) \cup (4, 8]$ años.

- b) La cantidad mínima absoluta es de 100 unidades en $t = 4$ años.
La cantidad máxima absoluta es de 1900 unidades en $t = 1$ año.

c) Gráfica de $N(t)$

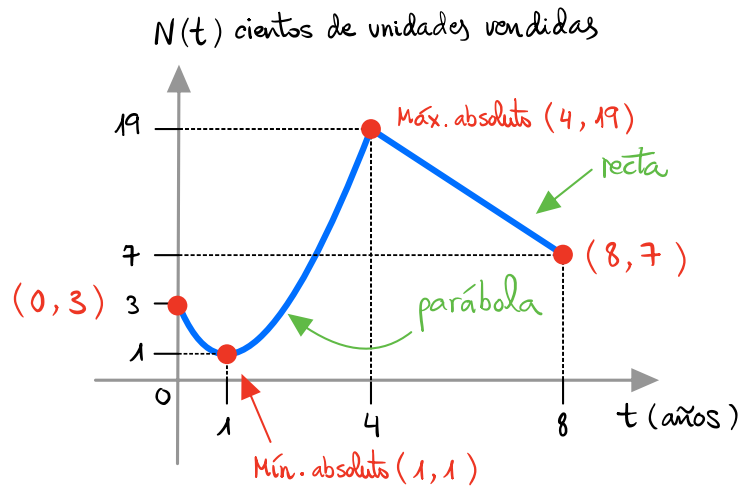
Puntos:

$(0, 3)$

$(1, 1)$

$(4, 19)$

$(8, 7)$



d) Sólo estamos por debajo de 300 unidades en el primer trozo.

$N(t) < 3 \Rightarrow 2t^2 - 4t + 3 < 3$; para resolver la inequación, calculamos las raíces.

$$2t^2 - 4t + \cancel{3} = \cancel{3} \Rightarrow 2t^2 - 4t = 0$$

$$2t(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ocorre entre 0 y 2 años $(0, 2)$