

1. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

a) $f(x) = e^{x^3-2x}$ (exponencial) (0,25 pt.)

b) $f(x) = \sqrt{5x} \cdot \ln x^3$ (0,5 pt.)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el **punto** (0,0) y tiene un **extremo relativo** en $(-1,1)$.
Obtén el valor de los **parámetros** a , b y c . ¿Qué **tipo de extremo** es? (1,5 pt.)

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Calcula los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **continua y derivable** en $x = 3$. (1,5 pt.)

b) Con los valores de $a = -4$ y $b = 11$, halla la **ecuación** de la **recta tangente** a $f(x)$ en $x = -1$. (0,5 pt.)

4. Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$. Calcula el **dominio**, los intervalos de **curvatura**, los **puntos de inflexión** y sus **coordenadas**. (1 pt)

5. Sea la función $f(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$

a) Calcula los intervalos de **monotonía**, los **extremos** relativos y sus **coordenadas**. (1,5 pt.)

b) Calcula analíticamente su **asíntota oblicua** (sólo la oblicua). (0,75 pt.)

6. La cantidad de CO₂ (en **millones de toneladas**) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la **función**:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} \cdot t^2 - 4 \cdot t + 18 & \text{si } 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t el **tiempo** transcurrido en **meses** desde comienzo del año.

a) Estudie en qué **períodos** se ha producido un **aumento / disminución** de la cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera. (1,5 pt.)

b) ¿Cuáles son las cantidades **máxima** y **mínima** de CO₂ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? (0,5 pt.)

c) Esboza la **gráfica** de la **función** teniendo en cuenta los apartados anteriores. (0,5 pt.)

1. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

a) $f(x) = e^{x^3-2x}$ (exponencial) $\Rightarrow f'(x) = e^{x^3-2x} \cdot (3x^2-2)$

b) $f(x) = \sqrt{5x} \cdot \ln x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x}} \cdot \ln x^3 + \sqrt{5x} \cdot \frac{3x^2}{x^3} = \frac{5}{2\sqrt{5x}} \cdot \ln x^3 + \sqrt{5x} \cdot \frac{3}{x}$

2. La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el **punto** (0,0) y tiene un **extremo relativo** en (-1,1).

Obtén el valor de los **parámetros** a, b y c . ¿Qué **tipo de extremo** es?

(1,5 pt.)

$$f(0)=0 \Rightarrow f(0)=a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ tenga un extremo en (-1,1) debe pasar por el punto y verificar la **condición de extremo**: $f(x) = ax^3 + bx$ ($c=0$)

$$\left. \begin{array}{l} f(-1)=1 \text{ Punto} \\ f'(-1)=0 \text{ Condición de extremo} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(-1)=a(-1)^3+b(-1) = \boxed{-a-b=1} \text{ [1]} \\ f'(x)=3ax^2+b \\ f'(-1)=3a(-1)^2+b=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{3a+b=0} \text{ [2]} \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -a-b=1 \\ 3a+b=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} 2a=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow b = -3a = -3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

Con los valores calculados anteriormente la función queda

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow f''(x) = \cancel{2} \cdot \frac{3x}{\cancel{2}} = 3x$$

$$\text{Evaluamos } f''(-1) = -3 < 0 \Rightarrow \boxed{x=-1 \text{ es un máximo local}}$$

También se podría resolver utilizando el método de la 1ª derivada.

3. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Calcula los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **continua y derivable** en $x = 3$. (1,5 pt.)

b) Con los valores de $a = -4$ y $b = 11$, halla la **ecuación** de la **recta tangente** a $f(x)$ en $x = -1$.

(0,5 pt.)

$$\text{Condición de continuidad} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\text{Condición de derivabilidad} \Rightarrow f'(a^-) = f'(a^+)$$

a) La función $f(x)$ debe ser **continua** en $x=3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 + ax + b = 9 + 3a + b = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + 2 = 8$$

$$9 + 3a + b = 8 \Rightarrow 3a + b = -1 \quad [1]$$

Condición de continuidad

La función $f(x)$ debe ser **derivable** en $x=3$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

No se pone = por si no hay solución y por que depende del valor de 'a'

$$f'(3^-) = f'(3^+)$$

$$2x + a = 2 \text{ en } x = 3$$

$$6 + a = 2 \Rightarrow a = -4 \quad [2]$$

Condición de derivabilidad

Sistema $\left\{ \begin{array}{l} 3a + b = -1 \\ a = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow b = -1 - 3a \Rightarrow b = -1 - 3(-4) = 11 \Rightarrow b = 11$

Solución: Si $a = -4$ y $b = 11$, $f(x)$ es derivable en $x=3$

b) Recta tangente en $x_0 = -1$ que corresponde al primer trozo siendo $a = -4$ y $b = 11$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación punto-pendiente}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 11 \Rightarrow f(-1) = 1 + 4 + 11 = 16$$

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(-1) = -2 - 4 = -6$$

$$y - 16 = -6 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow$$

$$y - 16 = -6 \cdot (x + 1) \quad \text{Recta tangente}$$

4. Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$. Calcula el **dominio**, los intervalos de **curvatura**, los **puntos de inflexión** y sus **coordenadas**. (1 pt)

Domínio: $y = x^3 - 2x^2 + 2x$, $Df(x) = \mathbb{R}$, luego no tiene puntos críticos.

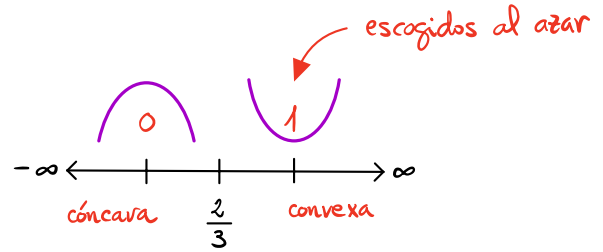
Curvatura $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

$$y' = 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow y'' = 6x - 4 = 0 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ Posible punto de inflexión P.I.}$$

La curvatura se estudia en los intervalos entre los P.I. y los puntos críticos

Evaluamos puntos al azar en cada intervalo

$$\begin{aligned} y''(0) &< 0 \\ y''(1) &> 0 \end{aligned}$$



En $x = \frac{2}{3}$ cambia la curvatura, luego es un P.I. confirmado.

Cóncava en $(-\infty, \frac{2}{3})$
Convexa en $(\frac{2}{3}, \infty)$

Coordenadas: $y = x^3 - 2x^2 + 2x$

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{27}$$

Punto de inflexión $\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$

5. Sea la función $f(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$

a) Calcula los intervalos de **monotonía**, los **extremos** relativos y sus **coordenadas**.

b) Calcula analíticamente su **asíntota oblicua** (sólo la oblicua).

a) $y = \frac{3x^2}{2x-1}$, $2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $Df(x) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, luego $x = \frac{1}{2}$ es un punto crítico.

$y' = 0$ Condición de extremo. $y' = \frac{6x \cdot (2x-1) - 3x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{12x^2 - 6x - 6x^2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2}$

$y' = \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ Posibles extremos

se cancela el denominador

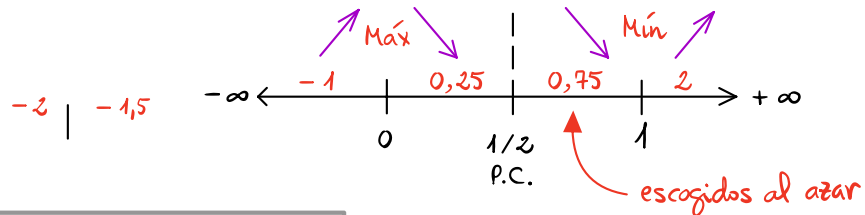
La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

Hay un punto crítico en $x = \frac{1}{2}$
Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{6x(x-1)}{(2x-1)^2}$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo

$y'(-1) = \frac{+}{+} > 0$
 $y'(0,25) = \frac{-}{+} < 0$
 $y'(0,75) = \frac{-}{+} < 0$
 $y'(2) = \frac{+}{+} > 0$



Crece $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
Decrece $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ Intervalos de Monotonía

En $x = 0$ hay un máximo relativo

En $x = 1$ hay un mínimo relativo

En $x = \frac{1}{2}$ hay puntos críticos

Coordenadas de los extremos: $y = \frac{3x^2}{2x-1}$,

$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x=0, y(0)=0 \\ \text{Si } x=1, y(1)=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{máximo relativo } (0, 0) \\ \text{mínimo relativo } (1, 3) \end{array}$ Extremos locales

b) Asíntota oblicua: $\boxed{\text{A.O.}}$ $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{2}$, $m \neq 0$ y $m \neq \infty$

Calculamos n : $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{2x-1} - \frac{3}{2} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 6x^2 + 3x}{4x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4x-2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{4}$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ $y = mx + n = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ Asíntota oblicua

6. La cantidad de CO₂ (en **millones de toneladas**) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la **función**:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} \cdot t^2 - 4 \cdot t + 18 & \text{si } 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t el **tiempo** transcurrido en **meses** desde comienzo del año.

- a) Estudie en qué **períodos** se ha producido un **aumento** / **disminución** de la cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera. (1,5 pt.)
- b) ¿Cuáles son las cantidades **máxima** y **mínima** de CO₂ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? (0,5 pt.)
- c) Esboza la **gráfica** de la **función** teniendo en cuenta los apartados anteriores. (0,5 pt.)

a) y b) Monotonía y extremos absolutos de la función $C(t)$. $D C(t) = [0, 12]$

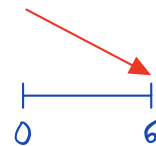
Trozo 1 $C(t) = 5 - \frac{t}{3} \quad [0, 6)$

$C'(t) = -\frac{1}{3} \neq 0$, condición de extremo $\Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay extremos.

$C'(t) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$ la función **decrece** todo el tiempo

$C(0) = 5 - \frac{0}{3} = 5$;

$C(6^-) = \lim_{t \rightarrow 6^-} 5 - \frac{t}{3} = 3 \Rightarrow t = 6$ es un **máximo local** en este intervalo $[0, 6)$.



Trozo 2 $C(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 \quad [6, 12]$

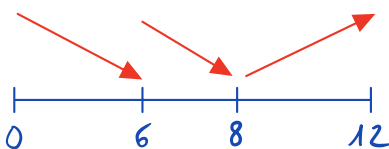
$C'(t) = \frac{t}{2} - 4 = 0$, condición de extremo $\Rightarrow \frac{t}{2} = 4 \Rightarrow t = 8$ es un **posible extremo** $t = 8 \in [6, 12]$

$C''(t) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow t = 8$ es un **mínimo local**

$C(6^+) = \frac{1}{4}6^2 - 4 \cdot 6 + 18 = 3 \Rightarrow$ es continua en $t = 6$

$C(8) = \frac{1}{4}8^2 - 4 \cdot 8 + 18 = 2$ es un **mínimo absoluto**

$C(12) = \frac{1}{4}12^2 - 4 \cdot 12 + 18 = 6$ es un **máximo absoluto**



La emisión de CO₂ aumenta en el período $(8, 12]$ meses.

La emisión de CO₂ disminuye en el período $[0, 8)$ meses.

- b) La emisión mínima absoluta es de 2 millones de toneladas a los 8 meses.
La emisión máxima absoluta es de 6 millones de toneladas a los 12 meses.

c) Gráfica de $C(t)$

Puntos:

$(0, 5)$

$(6, 3)$

$(8, 2)$

$(12, 6)$

