

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{3x}$ (1 pt.)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3} \right)$ (1 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 3}$ (2 pt.)

3. Estudia el **dominio** y la **continuidad** de la siguiente función (**clasifica** las discontinuidades si las hay) :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x - 1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

 4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x = -3$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + 2x - \frac{3}{2} & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 3} & \text{si } x > -3 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

5. **Calcula** a de modo que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 - ax} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (1,5 pt)

 6. **Calcula y simplifica** la **derivada** de la siguiente función: $f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{1 - x}$ (0,5 pt.)

 **Complementario: Calcula y simplifica** la **derivada** de la siguiente función:

$$f(x) = e^{x^2 - x} \cdot \sqrt{x^3 - 4x} \quad (1 \text{ pt.})$$

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{3x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{3x} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = \boxed{e^{-6} = \frac{1}{e^6}}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} - 1 \right) \cdot 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 1}{x^2 + 1} \cdot 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^2 - 3x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = -6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3} \right) \quad \infty - \infty \text{ IND}, \text{ Usamos la técnica del conjugado.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3}) \cdot (\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3})}{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x - 4x^2 + 3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

Como tiene grado 1 tanto en el numerador como en el denominador, dividimos los coeficientes de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3}} = \frac{2}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$2. \text{ **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función } f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 3}$$

Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

$$\text{Asíntotas verticales: } \boxed{\text{A.V.}} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}, \text{ Asíntota vertical } \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{Límites laterales: } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 + x}{x - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 + x}{x - 3} = +\infty$$

$$\text{Asíntota horizontal: } \boxed{\text{A.H.}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x - 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty \Rightarrow \text{No hay asíntota horizontal}$$

$$\text{Asíntota oblicua: } \boxed{\text{A.O.}} \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{2}{1} = 2, \text{ luego calculamos } n:$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + x}{x - 3} - 2 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 2x^2 + 6x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x}{x - 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{7}{1} = 7$$

$$\boxed{y = mx + n = 2x + 7} \quad \text{Asíntota oblicua}$$

3. Estudia el **dominio** y la **continuidad** de la siguiente función (**clasifica** las discontinuidades si las hay) :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x-1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos problemáticos.

En el 2º trozo $x=1$ anula el denominador $\Rightarrow$ El dominio de la función: $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

; además los puntos -2 y 3 separan los intervalos (fronteras).

Vamos a estudiar la continuidad en $\{-2, 1, 3\}$

$$\boxed{x = -2} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x + 1 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9}{x-1} = -3 = f(-2) \end{array} \right\} \text{ En } x = -2 \text{ la función es continua.}$$

$$\boxed{x = 1} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9}{x-1} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{En } x = 1 \text{ hay una discontinuidad de salto infinito.} \\ \text{Además } \nexists f(1). \end{array}$$

$$\boxed{x = 3} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9}{x-1} = \frac{9}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 + 2x = 15 = f(3) \end{array} \right\} \text{ En } x = 3 \text{ hay una discontinuidad de salto finito.}$$

Finalmente,

La continuidad $\mathcal{C} f(x) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ o bien se puede escribir $f(x) \in \mathcal{C} \mathbb{R} - \{1, 3\}$

4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x = -3$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + 2x - \frac{3}{2} & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 3} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos problemáticos.

Factorizamos el denominador del 2º trazo.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} < \begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix}, -3 \cdot (-1) = \frac{3}{1} \checkmark$$

Los puntos $\notin (-3, \infty) \Rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}}$

Continuidad. Estudiamos el punto $\{-3\}$ (frontera del intervalo).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} a x^2 + 2x - \frac{3}{2} &= 9a - 6 - \frac{3}{2} = 9a - \frac{15}{2} = f(-3) \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 3} &= \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2 \cdot (x+3) \cdot (x-\frac{3}{2})}{(x+3) \cdot (x+1)} = \frac{2 \cdot (-3-\frac{3}{2})}{-2} = \frac{9}{2} \end{aligned} \right\}$$

Factorizamos el numerador $2x^2 + 3x - 9 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 9}{4} < \begin{matrix} -3 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{matrix}, -3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \checkmark$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -3$, deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) \Rightarrow 9a - \frac{15}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{\frac{9}{2} + \frac{15}{2}}{9} = \frac{\frac{24}{2}}{9} = \frac{4}{3}$$

$\boxed{\text{Si } a = \frac{4}{3}, f(x) \text{ es continua en } x = -3}$

5. **Calcula** a de modo que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 - ax} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\infty - \infty$ IND, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 - ax})(\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 - ax})}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 - ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + x - \cancel{2x^2} + ax}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 - ax}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+1)x}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 - ax}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

Como tiene grado 1 tanto en el numerador como en el denominador, dividimos los coeficientes de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 - ax}} = \frac{a+1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{a+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a+1}{2} = 3 \Rightarrow a = 5$$

enunciado $\nearrow$

6. **Calcula y simplifica la derivada** de la siguiente función: $f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{1 - x}$

$$f'(x) = \frac{(6x+5) \cdot (1-x) - (3x^2+5x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{6x - 6x^2 + 5 - 5x + 3x^2 + 5x}{(1-x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x + 5}{(1-x)^2}$$



Complementario: Calcula y simplifica la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = e^{x^2-x} \cdot \sqrt{x^3-4x} \quad ; \text{ es un producto}$$

$$f'(x) = e^{x^2-x} \cdot (2x-1) \cdot \sqrt{x^3-4x} + e^{x^2-x} \cdot \frac{3x^2-4}{2 \cdot \sqrt{x^3-4x}}$$

$$f'(x) = e^{x^2-x} \cdot \left[(2x-1) \cdot \sqrt{x^3-4x} + \frac{3x^2-4}{2 \cdot \sqrt{x^3-4x}} \right]$$