

1. Sea la función $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$.
- Calcula los **valores** de los **parámetros** a y b para que $f(x)$ tenga un **extremo relativo** en el punto de coordenadas $(1,3)$. (1,5 pt.)
 - En este caso determina si se trata de un **máximo o de un mínimo**. (0,5 pt.)

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + m \cdot x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Calcula el **valor** del **parámetro** m para que la función sea **continua** en $x = 1$. (0,75 pt.)
- Para ese **valor** de m , ¿**es derivable** la función en $x = 1$? (1 pt.)
- Calcula la ecuación la **recta tangente** a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$. (0,75 pt.)

3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$. Determina:

- los **intervalos de crecimiento y de decrecimiento** de $f(x)$, así como sus **extremos relativos** si los tiene. (1,5 pt.)
- los **intervalos de concavidad y convexidad** de $f(x)$ y los **puntos de inflexión**. (1 pt.)

4. El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el **gasto en publicidad, en miles de euros**.

- ¿Para qué intervalos del gasto en publicidad **crecen** los **beneficios**?
¿cuándo **disminuyen**? (1 pt.)
- Calcula el **gasto** en publicidad que produce **máximo beneficio**.
¿Cuál es ese **beneficio máximo**? (0,75 pt.)
- Esboza la **gráfica** de la función. (0,75 pt.)
- Calcula el **gasto en publicidad** a partir del cual la empresa no tiene **pérdidas**. (0,5 pt.)

1. Sea la función $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$.

- a) Calcula los **valores** de los **parámetros** a y b para que $f(x)$ tenga un **extremo relativo** en el punto de coordenadas $(1,3)$. (1,5 pt.)
- b) En este caso determina si se trata de un **máximo o de un mínimo**. (0,5 pt.)

a) Para que la función $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ tenga un extremo en $(1,3)$ debe pasar por el punto y verificar la **condición de extremo**: $f(x) = ax^{-1} + bx^2$ (es más fácil de derivar como potencia)

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 3 \quad \text{Punto} \\ f'(1) = 0 \quad \text{Condición de extremo} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(1) = \frac{a}{1} + b \cdot 1^2 = a + b = 3 \quad [1] \\ f'(x) = -ax^{-2} + 2bx = -\frac{a}{x^2} + 2bx \\ f'(1) = -\frac{a}{1^2} + 2b \cdot 1 = -a + 2b = 0 \quad [2] \end{array}$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} a + b = 3 \\ -a + 2b = 0 \end{array} \right\} \text{Sumando} \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\Rightarrow a = 3 - b = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\text{Si } a = 2 \text{ y } b = 1 \Rightarrow f(x) \text{ tiene un extremo en } (1,3) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} + x^2$$

$$b) f'(x) = -ax^{-2} + 2bx \Rightarrow f''(x) = 2ax^{-3} + 2b = \frac{2a}{x^3} + 2b$$

$$\text{Con los valores calculados anteriormente: } f''(x) = \frac{4}{x^3} + 2$$

$$\text{Evaluamos } f''(1) = \frac{4}{1^3} + 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x = 1 \text{ es un mínimo local}}$$

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + m \cdot x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Calcula el **valor** del **parámetro** m para que la función sea **continua** en $x = 1$. (0,75 pt.)
 b) Para ese **valor** de m , ¿**es derivable** la función en $x = 1$? (1 pt.)
 c) Calcula la ecuación la **recta tangente** a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$. (0,75 pt.)

a) Para que sea **continua** en $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2^1 = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + mx + 5 = 1 + m + 5 = m + 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x=1, \\ \text{deberán coincidir los límites laterales.} \end{array}$$

$$2 = m + 6 \Rightarrow \boxed{m = -4} \quad \text{Condición de continuidad}$$

b) La condición de **derivabilidad** es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \cdot \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + m & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2^x \cdot \ln 2 = 2x - 4 \text{ en } x=1 \\ 2 \cdot \ln 2 \neq -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{No es derivable en } x=1}$$

c) Recta tangente en $x_0=0$ que corresponde al primer tramo.

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad \text{Ecuación punto-pendiente}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2^x \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1 \\ f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 \Rightarrow f'(0) = \ln 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y - 1 = \ln 2 (x - 0) \Rightarrow \\ \boxed{y - 1 = x \cdot \ln 2} \quad \text{Recta tangente} \end{array}$$

3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$. Determina:

- a) los **intervalos de crecimiento y de decrecimiento** de $f(x)$, así como sus **extremos relativos** si los tiene. (1,5 pt.)
- b) los **intervalos de concavidad y convexidad** de $f(x)$ y los **puntos de inflexión**. (1 pt.)

a) **Monotonía**

$y = \frac{x^3}{1-x^2}$, $1-x^2=0 \Rightarrow x = \pm 1$, $Df(x) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$, luego $x = \{1, -1\}$ son puntos críticos.

$y' = 0$ Condición de extremo. $y' = \frac{3x^2 \cdot (1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$

$y' = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(3-x^2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$ Posibles extremos

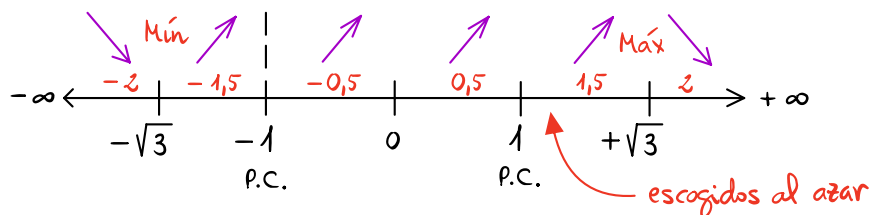
se cancela el denominador

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

Hay dos puntos críticos en $x = \{1, -1\}$. Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(3-x^2)^2}$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo



$y'(-2) = \frac{-}{+} < 0 \searrow$

$y'(-1,5) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

$y'(-0,5) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

$y'(0,5) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

$y'(1,5) = \frac{+}{+} > 0 \nearrow$

$y'(2) = \frac{-}{+} < 0 \searrow$

Crece $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$
Decrece $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Intervalos de Monotonía

En $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo relativo

En $x = +\sqrt{3}$ hay un máximo relativo

En $x = \{1, -1\}$ hay puntos críticos

Coordenadas de los extremos: $y = \frac{x^3}{1-x^2}$,

Si $x = -\sqrt{3}$, $y(-\sqrt{3}) \simeq 2,6$

Si $x = +\sqrt{3}$, $y(\sqrt{3}) \simeq -2,6$

Se deduce que la simetría de la función es impar.

mínimo relativo $(-\sqrt{3}, 2,6)$
máximo relativo $(\sqrt{3}, -2,6)$

Extremos locales

b) Curvatura $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

$$y' = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{(6x - 4x^3) \cdot (1-x^2)^{-2} - (3x^2 - x^4) \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^{4/3}} =$$

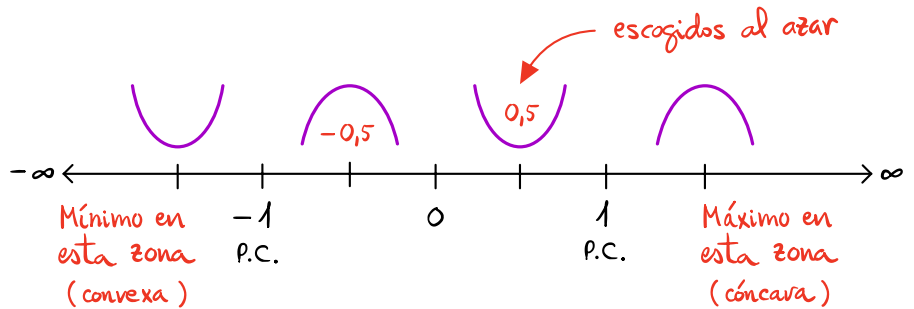
$$= \frac{(6x - 4x^3) \cdot (1-x^2) + (3x^2 - x^4) \cdot 4x}{(1-x^2)^3} = \frac{6x - 6x^3 - 4x^3 + 4x^5 + 12x^3 - 4x^5}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(1-x^2)^3}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{Posible punto de inflexión P.I.}$$

no tiene solución

se cancela el denominador

La curvatura se estudia en los intervalos entre los P.I. y los puntos críticos



$$y''(-0,5) = \frac{-}{+} < 0$$

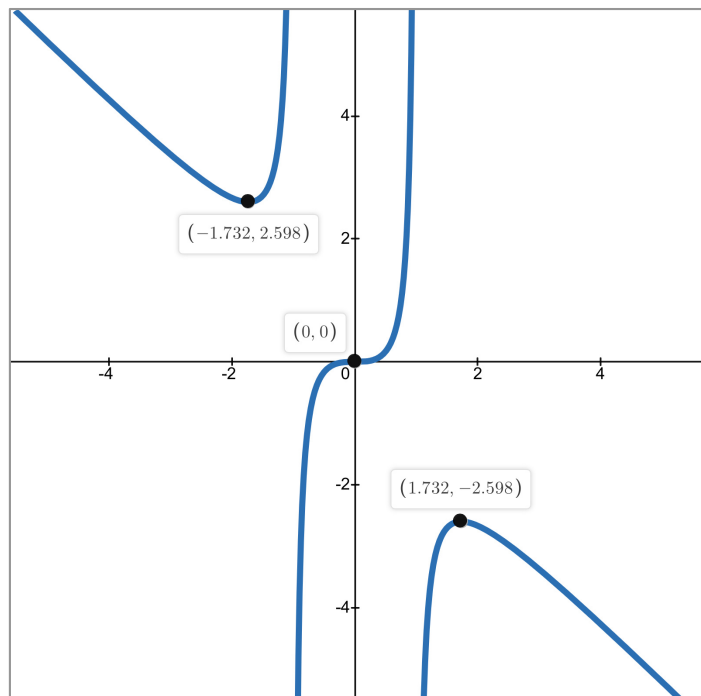
$$y''(0,5) = \frac{+}{+} > 0$$

Cóncava en $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
 Convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

En $x = 0$ cambia la curvatura, luego es un P.I. confirmado.

$$y = \frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow y(0) = 0$$

Punto de inflexión $(0, 0)$



4. El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el **gasto en publicidad, en miles de euros**.

- ¿Para qué intervalos del gasto en publicidad **crecen** los **beneficios**?
¿cuándo **disminuyen**? (1 pt.)
- Calcula el **gasto** en publicidad que produce **máximo beneficio**.
¿Cuál es ese **beneficio máximo**? (0,75 pt.)
- Esboza la **gráfica** de la función. (0,75 pt.)
- Calcula el **gasto en publicidad** a partir del cual la empresa no tiene **pérdidas**. (0,5 pt.)

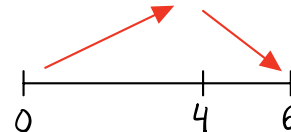
a) Monotonía y extremos absolutos de la función $f(x)$.

Trozo 1 $f(x) = -5x^2 + 40x - 60$ $[0, 6]$, x (miles de euros)

$$f'(x) = -10x + 40 = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow x = \frac{40}{10} = 4, \text{ posible extremo}$$

$$f''(x) = -10 \Rightarrow f''(4) < 0 \Rightarrow x = 4 \text{ es un máximo local}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -60 \\ f(4) = 20 \\ f(6) = 0 \end{array} \right\} x = 4 \text{ es un máximo local en } [0, 6]$$



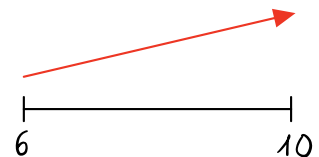
Trozo 2 $f(x) = \frac{5}{2}x - 15$ $(6, 10]$

$$f'(x) = \frac{5}{2} \neq 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow \text{No tiene solución, luego no hay extremos.}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow \text{la función crece en } (6, 10].$$

$$f(6^+) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{5}{2} \cdot 6 - 15 = 0; \text{ es continua en } x = 6$$

$$f(10) = \frac{5}{2} \cdot 10 - 15 = 10$$



Los beneficios crecen con un gasto de $[0, 4) \cup [6, 10]$ miles de euros.

Los beneficios decrecen con un gasto de $(4, 6)$ miles de euros.

b) Máximo beneficio.

El máximo absoluto de beneficio se produce en $f(4) = 20$, es decir, se produce un beneficio máximo de 20.000 € con un gasto de 4.000 €.

c) Gráfica de $f(x)$.

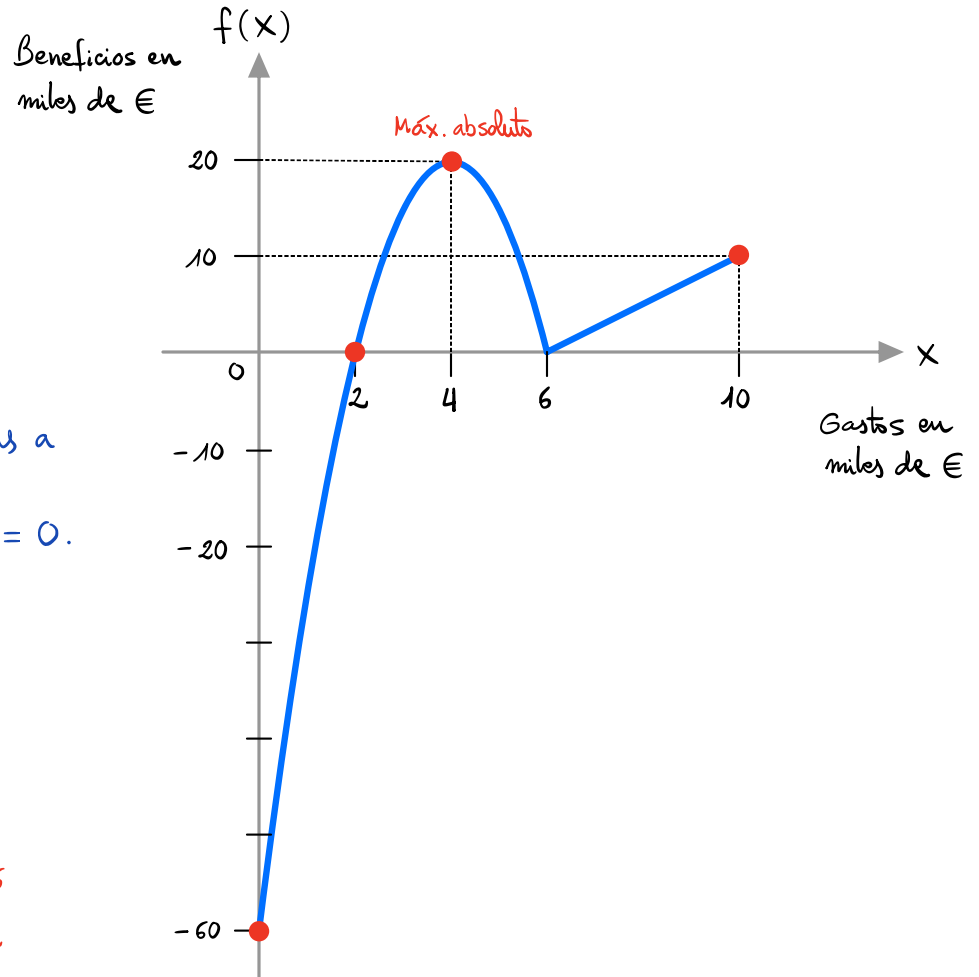
Puntos:

$(0, -60)$

$(4, 20)$

$(6, 0)$

$(10, 10)$



d) La empresa no tiene pérdidas a partir del momento en que $f(x) = 0$.

En el primer trozo:

$$-5x^2 + 40x - 60 = 0 \quad \div (-5)$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix}$$

$$6 \cdot 2 = \frac{12}{1} \checkmark$$

Luego, ayudándonos de la gráfica concluimos que la empresa

no tiene pérdidas a partir de 2.000 € de gasto.

El punto $(2, 0)$ es el punto de corte con el eje x .